

# Le volte semplici

*Federico Fallavollita*

## **Abstract**

2.3 Le volte semplici, 2.3.1 La volta a botte a tutto sesto e retta, p.440 - 2.3.2 La volta a vela, p.441 - 2.3.3 La volta a vela a sesto incompleto o volta boema, p.444 - 2.3.4 La volta anulare, p.444 - 2.3.5 La volta elicoidale o volta di Saint-Gilles, p.444 - 2.3.6 La cupola, p. 447

Riccardo Migliari

# **Geometria descrittiva**

Volume II

Tecniche e applicazioni

*Contributi di*

Leonardo Baglioni, Roberto Ciaroni, Laura De Carlo, Anna De Santis  
Federico Fallavollita, Filippo Fantini, Leonardo Paris, Marta Salvatore  
Camillo Trevisan, Graziano Mario Valenti

**CittàStudi**  
EDIZIONI

Proprietà letteraria riservata  
© 2009 De Agostini Scuola SpA – Novara  
1ª edizione: ottobre 2009  
*Printed in Italy*

Tutti i diritti riservati. Nessuna parte del materiale protetto da questo copyright potrà essere riprodotta in alcuna forma senza l'autorizzazione scritta dell'Editore.

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% del presente volume/fascicolo, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO – Corso di Porta Romana, 108 – 20122 Milano – e-mail: [segreteria@aidro.org](mailto:segreteria@aidro.org)

*Stampa:* Stamperia Artistica Nazionale - Trofarello (TO)

---

Ristampe:	0 1	2 3	4 5	6 7	8 9
Anno:	2009	2010	2011	2012	2013

# Indice

*IX* Gli autori

*XI* Prefazione

## Parte prima – Teorie e tecniche della rappresentazione digitale

### 5 **Capitolo 1 – Le teorie e le tecniche della rappresentazione matematica**

*di Roberto Ciarloni*

- 5 1.1 Strategie di modellazione nei sistemi CAD
- 8 1.2 Cosa si intende per curve, superfici e solidi nei sistemi CAD
  - 1.2.1 La curva CAD, p. 8 – 1.2.2 La superficie CAD, p. 9 – 1.2.3 Il solido CAD, p. 11
- 12 1.3 Rappresentazioni matematiche di curve e superfici
  - 1.3.1 Curve parametriche, p. 12 – 1.3.2 Curve a poli, p. 13 – 1.3.3 Da Bézier a NURBS, p. 15 – 1.3.4 Tassonomia delle curve a poli, p. 17 – 1.3.5 Proprietà notevoli delle curve a poli, p. 18 – 1.3.6 La parametrizzazione, p. 18 – 1.3.7 Altre rappresentazioni di curve, p. 19 – 1.3.8 Superfici parametriche, p. 20 – 1.3.9 Superfici a poli, p. 20 – 1.3.10 Proprietà notevoli delle superfici a poli, p. 21 – 1.3.11 Altre rappresentazioni di superfici, p. 21 – 1.3.12 Non confondere rappresentazione matematica con modo di creazione, p. 23 – 1.3.13 Nota matematica: il teorema di Weierstrass e il fenomeno di Runge, p. 24
- 25 1.4 Rappresentare la geometria nei computer

1.4.1 Approcci alla tolleranza, p. 27 – 1.4.2 Tolleranza angolare, p. 28

### 28 1.5 **Qualità delle curve e delle superfici**

1.5.1 Tangenti, curvature e torsioni, p. 29 – 1.5.2 Continuità tra curve, p. 31 – 1.5.3 Continuità geometrica e continuità parametrica, p. 32 – 1.5.4 Continuità tra superfici, p. 32 – 1.5.5 Tangenti e curvature nelle superfici, p. 33 – 1.5.6 Strumenti diagnostici della qualità di un modello, p. 34

### 37 1.6 **Rappresentazioni matematiche di solidi**

1.6.1 Rappresentazione B-rep, p. 37 – 1.6.2 Nota matematica: varietà topologiche, p. 39 – 1.6.3 Rappresentazione CSG, p. 39 – 1.6.4 Rappresentazione a Enumerazione Spaziale, p. 41

### 42 1.7 **Principi di modellazione di forme complesse**

1.7.1 Cos'è una forma «complessa», p. 42 – 1.7.2 Aspetti della complessità, p. 42 – 1.7.3 Concepire una forma complessa, p. 43 – 1.7.4 Tecniche di costruzione di forme complesse, p. 43 – 1.7.5 Creazione e modifica, p. 43 – 1.7.6 Forme primarie e forme secondarie, p. 49 – 1.7.7 Modellazione concettuale e ingegnerizzazione, p. 51 – 1.7.8 Approccio locale e approccio globale (GSM), p. 52 – 1.7.9 Associatività, parametrizzazione e modellazione diretta, p. 55

### 60 **Capitolo 2 – Teorie e tecniche della rappresentazione numerica o poligonale**

*di Filippo Fantini*

- 60 2.1 Obiettivi della modellazione poligonale
- 63 2.2 Definizioni e nomenclatura
- 71 2.3 Superfici poligonali
- 75 2.4 Superfici di suddivisione

- 78 2.5 Introduzione alle tecniche di modellazione
- 83 2.6 Mappe di vertici
- 84 2.7 Box modeling
- 87 2.8 Adding modeling
- 89 2.9 Spline cage
- 93 2.10 Scuplting

## Parte seconda – Le linee curve, le superfici e le loro proprietà

- 97 **Capitolo 1 – Le linee curve**  
*di Laura De Carlo, Leonardo Baglioni*
- 97 1.1 Generalità
- 100 1.2 Le linee curve piane
  - 1.2.1 Proprietà delle linee piane, p. 100 – 1.2.2 Curve derivate da altre curve: evoluta, evolvente, podaria e caustiche, p. 103
- 106 1.3 Le linee sghembe, gobbe (o a doppia curvatura)
  - 1.3.1 Proprietà delle linee sghembe, p. 103 – 1.3.2 Evoluta ed evolvente di una curva gobba, p. 110
- 113 1.4 Le linee luogo geometrico, piane e sghembe
  - 1.4.1 Cenni alle coniche come linee luogo del piano, p. 113 – 1.4.2 La famiglia delle cicloidi, p. 118 – 1.4.3 Spirali ed eliche, p. 122
- 129 1.5 Il contributo della rappresentazione matematica nello studio di lossodromie, eliche e spirali
- 144 **Capitolo 2 – Superfici**  
*di Riccardo Migliari, Federico Fallavollita, Marta Salvatore*
- 144 2.1 La classificazione delle superfici e l'ordine tenuto in questo libro
- 145 2.2 Definizioni e caratteristiche generali delle superfici
  - 2.2.1 La continuità di una superficie e il piano tan-

- gente, p. 147 – 2.2.2 La curvatura delle superfici, p. 148 – 2.2.3 Il contorno apparente di una superficie e le linee isòfote, p. 151
- 153 2.3 Le superfici rigate
  - 2.3.1 La costruzione di una superficie rigata generica, p. 154 – 2.3.2 Le superfici rigate quadriche, p. 161 – 2.3.3 Coni e cilindri quadrici, p. 162 – 2.3.4 L'iperboloide a una falda, p. 168 – 2.3.5 Il paraboloido iperbolico, p. 175 – 2.3.6 Il paraboloido iperbolico equilatero, p. 182 – 2.3.7 La genesi proiettiva delle superfici rigate quadriche, p. 185 – 2.3.8 Alcune proprietà proiettive delle quadriche rigate, p. 188 – 2.3.9 Il sistema polare rispetto a una quadrica, p. 195 – 2.3.10 Il centro, i diametri e gli assi di una quadrica, p. 198 – 2.3.11 La proiezione stereografica di un iperboloide a una falda, p. 201 – 2.3.12 Proprietà grafiche e proprietà metriche delle rigate sghembe, p. 203 – 2.3.13 Le superfici sviluppabili, p. 213 – 2.3.14 I casi particolari di superfici sviluppabili: coni e cilindri, p. 219 – 2.3.15 Sviluppo del cono e del cilindro sopra un piano, p. 220
- 224 2.4 Le superfici di rivoluzione e il toro
- 229 2.5 Gli elicoidi
- 235 2.6 Gli elicoidi generati dal cerchio e da altre curve: colonna torsa, vite di Saint Gilles, serpentino, elicoidi conici o chiocciolate
- 241 2.7 Le superfici a pendenza uniforme
- 245 2.8 Le superfici quadriche non rigate
  - 2.8.1 Polarità e coni circoscritti a una quadrica, p. 245 – 2.8.2 L'ellissoide, p. 248 – 2.8.3 L'iperboloide a due falde, p. 253 – 2.8.4 Il paraboloido ellittico, p. 256 – 2.8.5 La genesi proiettiva delle quadriche, p. 260 – 2.8.6 La sfera, p. 262 – 2.8.7 Una interessante applicazione delle proprietà della sfera: il teorema di Dandelin, p. 264 – 2.8.8 La proiezione stereografica della sfera, p. 269 – 2.8.9 Il problema di Apollonio, p. 272
- 278 2.9 Le superfici di interpolazione
- 280 2.10 Intersezioni piane tra superfici quadriche
  - 2.10.1 Le intersezioni fra superfici quadriche, in generale, p. 280 – 2.10.2 Sezioni piane di superfici quadriche, p. 283 – 2.10.3 Intersezioni piane fra superfici quadratiche, p. 290

## Parte terza – Applicazioni

### 299 **Capitolo 1 – I poliedri regolari e semiregolari con un approfondimento sulle cupole geodetiche**

*di Leonardo Baglioni*

- 299 1.1 Le proprietà geometriche dei poliedri
- 308 1.2 I solidi platonici
- 311 1.3 I solidi archimedei
- 325 1.4 I poliedri catalani
- 327 1.5 La tassellazione dello spazio
- 337 1.6 I poliedri e le bolle di sapone
- 347 1.7 Discretizzazione delle superfici continue per mezzo di superfici poliedriche
- 355 1.8 La discretizzazione della sfera: le cupole geodetiche
  - 1.8.1 Prima tipologia: le griglie icosaedriche, p. 365 – 1.8.2 Seconda tipologia: le griglie dodecaedriche, p. 368 – 1.8.3 Terza tipologia: le griglie A III, p. 370 – 1.8.4 Quarta tipologia: le griglie A V, p. 371 – 1.8.5 Quinta tipologia: le griglie A XIII, p. 373
- 377 1.9 Considerazioni di carattere geometrico e strutturale
- 384 1.10 Le NURBS e la discretizzazione delle superfici free-form
- 388 1.11 Breve storia dei poliedri
- 401 1.12 La generazione delle mesh
- 404 1.13 Gli algoritmi informatici di meshing
  - 1.13.1 Generatori di mesh triangolari e tetraedrici, p. 405 – 1.13.2 Generatori di mesh quadrilateri ed esaedrici, p. 411 – 1.13.3 Surface Meshing, p. 414
- 415 1.14 Post produzione delle mesh
- 417 1.15 Metodi di tassellazione delle superfici parametriche nei modellatori informatici

### 423 **Capitolo 2 – Gli archi e le volte**

*di Riccardo Migliari e Federico Fallavollita*

- 423 2.1 Nomenclatura e classificazione generale degli archi e delle volte

- 428 2.2 Il tracciamento e la suddivisione in conci degli archi
  - 2.2.1 Arco a tutto sesto, p. 428 – 2.2.2 Archi a sesto ribassato o a sesto scemo, p. 430 – 2.2.3 Profilo ovale, p. 432 – 2.2.4 Archi a sesto rialzato, p. 436 – 2.2.5 Archi a sesto acuto, p. 436
- 439 2.3 Le volte semplici
  - 2.3.1 La volta a botte a tutto sesto e retta, p. 440 – 2.3.2 La volta a vela, p. 441 – 2.3.3 La volta a vela a sesto incompleto o volta boema, p. 444 – 2.3.4 La volta anulare, p. 444 – 2.3.5 La volta elicoidale o vite di Saint-Gilles, p. 444 – 2.3.6 La cupola, p. 447
- 447 2.4 Le volte composte
  - 2.4.1 Le volte lunettate, p. 447 – 2.4.2 Le volte a crociera e a padiglione, p. 451 – 2.4.3 Le cupole composte, p. 459

### 462 **Capitolo 3 – I tetti**

*di Anna De Santis*

- 462 3.1 Aspetti generali e nomenclatura
- 463 3.2 Proprietà geometriche delle falde ad angolo di pendio costante
- 464 3.3 Tecniche di progettazione di un tetto
  - 3.3.1 Edificio isolato di forma rettangolare o quadrangolare, p. 465 – 3.3.2 Edifici isolati di forma irregolare, p. 468 – 3.3.3 Tetti a gronde inclinate, p. 476
- 481 3.4 Correzione della pendenza al fine di semplificare la geometria di un tetto
- 483 3.5 Sviluppo del tetto

### 485 **Capitolo 4 – Stereotomia della pietra**

*di Marta Salvatore, Camillo Trevisan*

- 485 4.1 La stereotomia
  - 4.1.1 Principi della progettazione stereotomica, p. 489 – 4.1.2 Le murature a superficie di paramento piana, p. 491 – 4.1.3 Le murature a superficie di paramento curva, p. 496 – 4.1.4 Le volte sferiche, p. 497 – 4.1.5 Le volte cilindriche rette, p. 501 – 4.1.6 Le volte cilindriche oblique, p. 502 – 4.1.7 Le volte cilindriche strombate, p. 512 – 4.1.8 Le volte coniche, p. 516 – 4.1.9 Le scale elicoidali, p. 521
- 523 4.2 Metodi e applicazioni tra la metà del Cinquecento e la metà del Settecento

- 4.2.1 Ricostruzione del metodo proposto da Philibert Delorme per trovare i pannelli dei concetti di un arco, p. 547 – 4.2.2 Ricostruzione del metodo proposto da Philibert Delorme per la *trompe* di Anet, p. 548 – 4.2.3 Ricostruzione del metodo proposto da Girard Desargues, p. 555
- 562 **Capitolo 5 – Stereotomia del legno**  
*di Leonardo Paris*
- 562 5.1 Premessa
- 564 5.2 Le unioni  
5.2.1 Le unioni a tenone e mortasa, p. 564 – 5.2.2 Le unioni a mezzo legno, p. 567 – 5.2.3 Le unioni a coda di rondine, p. 570 – 5.2.4 Le unioni a innesto verticale, p. 571 – 5.2.5 Le unioni a innesto orizzontale, p. 572
- 573 5.3 Le capriate  
5.3.1 Elementi costitutivi di una capriata palladiana semplice, p. 574 – 5.3.2 Individuazione delle unioni in una capriata semplice, p. 576 – 5.3.3 Altri esempi di capriate composte, p. 577 – 5.3.4 Orditura principale nelle falde a padiglione ortogonale e obliquo, p. 578 – 5.3.5 Su alcuni nodi particolari, p. 581
- 585 5.4 Il corrimano curvo nelle scale in legno  
5.4.1 Dettaglio del corrimano curvo, p. 587
- 589 **Capitolo 6 – La rappresentazione delle ombre e del chiaroscuro**  
*di Riccardo Migliari, Graziano Valentini*
- 589 6.1 Il chiaroscuro  
6.1.1 La propagazione della luce e i suoi modelli geometrici, p. 589 – 6.1.2 Modelli di sorgente luminosa, p. 589 – 6.1.3 Effetti della luce sui corpi, p. 591 – 6.1.4 Ombra propria, portata e autoportata, p. 592 – 6.1.5 Chiaroscuro e grado di intensità luminosa, p. 592 – 6.1.6 Intensità luminosa e chiarezza apparente, p. 594 – 6.1.7 Punti brillanti e riflessi, p. 595 – 6.1.8 Prospettiva aerea, p. 596 – 6.1.9 Costruzione accurata dell'immagine del Sole, p. 598
- 598 6.2 La rappresentazione digitale del chiaroscuro  
6.2.1 Ottica geometrica, fisica e quantistica, p. 599 – 6.2.2 Algoritmi unbiased e biased, p. 601 – 6.2.3 Modelli d'illuminazione locale, p. 602 – 6.2.4 Modelli di illuminazione globale, p. 608
- 617 *Bibliografia*
- 621 *Indice analitico*

# Gli autori

Questo libro è il risultato di un'ampia collaborazione di esperti con competenze diverse, provenienti dal mondo accademico, dell'istruzione, industriale e professionale, che si sono riconosciuti nel progetto di rinnovamento della geometria descrittiva ideato e coordinato da Riccardo Migliari:

**Leonardo Baglioni**, architetto, dottore di ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo presso la «Sapienza» Università di Roma. Si interessa ai problemi di rappresentazione per mezzo dei metodi grafici tradizionali e digitali, attualmente si sta occupando dello studio della discretizzazione delle superfici continue condotto nel metodo della rappresentazione matematica.

**Roberto Ciarloni**, ingegnere, è attualmente Responsabile Della Tecnologia (CTO) di think3, una società multinazionale che commercializza soluzioni per la progettazione industriale. La sua carriera ha seguito la nascita e l'affermazione del CAD tridimensionale in Italia e nel mondo. Ha contribuito a sviluppare e supervisionare diversi prodotti CAD in un mercato altamente competitivo. Ha gestito team di sviluppo software internazionali contribuendo a innovare il processo di sviluppo software. Ha acquisito una profonda esperienza nei concetti della modellazione geometrica e della computer graphics. È stato professore di computer grafica al Politecnico di Milano. Attualmente si occupa di nuove

tecnologie applicate al CAD, tra cui nuovi sistemi di visualizzazione e di interazione.

**Laura De Carlo**, architetto, professore ordinario alla «Sapienza» Università di Roma, dove insegna Fondamenti e applicazioni di Geometria Descrittiva, alla Facoltà di Architettura «L. Quaroni». Oltre alle tematiche inerenti la Geometria descrittiva e la sua storia in rapporto alle tecnologie informatiche, si occupa di nuove strumentazioni per l'analisi dell'architettura e per il rilievo urbano.

**Anna De Santis**, dottore di Ricerca in Rilievo e Rappresentazione del Costruito, è docente di Discipline Geometriche e Architettoniche nella scuola secondaria superiore. Dal 2003 è professore a contratto presso la Facoltà di Architettura «L. Quaroni» della «Sapienza» Università di Roma, nei corsi di Disegno, Geometria e Scienza della Rappresentazione presso i corsi di laurea in Disegno Industriale e Architettura degli Interni. Ha partecipato a ricerche sulla storia della Scienza della Rappresentazione.

**Federico Fallavollita**, dottore di ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo presso la «Sapienza» Università di Roma. Oltre ad avere collaborato come progettista a diversi concorsi internazionali d'architettura, svolge attività didattica e di ricerca nell'ambito della «Sapienza» Università di Roma. Si occupa, in generale, di problemi di rappresentazione e di rilievo dell'architettura. In particolare s'interessa del rinnova-

mento della Geometria descrittiva connesso all'uso degli strumenti informatici.

**Filippo Fantini** è laureato in architettura, dottore di ricerca dell'area disciplinare del Disegno e attualmente borsista presso l'Università Politecnica di Valencia. Si occupa di computer grafica sia nell'ambito della professione che nella formazione. Da anni lavora nel settore del rilevamento digitale ed in particolar modo sperimenta i sistemi di ottimizzazione dei modelli numerici mediante software dedicato alla produzione di effetti visivi.

**Riccardo Migliari**, architetto, è professore ordinario di Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva alla «Sapienza» Università di Roma ove insegna nella Facoltà di Architettura «L. Quaroni». Si interessa delle applicazioni del computer al progetto e alla rappresentazione dell'architettura dalla fine degli anni sessanta e ha seguito l'evoluzione dei sistemi informatici fin dal loro primo apparire nel mondo accademico e professionale. È attualmente impegnato nel progetto di rinnovamento della disciplina di cui è titolare e ha dedicato a questo tema molte pubblicazioni, in parte consultabili sul sito: <http://www.migliari.it>.

**Leonardo Paris**, architetto, è professore associato presso la Facoltà di Ingegneria della «Sapienza» Università di Roma nel settore scientifico disciplinare del Disegno. Oltre all'attività didattica, che svolge principalmente presso la sede distaccata del Polo Universitario di Rieti, segue con particolare attenzione l'evolversi delle tecniche e delle metodologie avanzate nel campo del rilievo e in quello della rappresentazione. I principali campi di ricerca sono quelli riguardanti la fotogrammetria, la geometria descrittiva e il disegno informatico.

**Marta Salvatore**, architetto, dottore di ricerca in Rilievo e Rappresentazione dell'Architettura e dell'Ambiente presso l'Università degli studi di Firenze. Indirizza la propria attività di ricerca allo studio della geometria descrittiva e dei contributi teorici che concorsero al suo fondamento. Si occupa allo stesso tempo dei metodi della rappresentazione digitale con particolare interesse per la rappresentazione matematica.

**Camillo Trevisan**, professore Associato in Disegno presso l'Università IUAV di Venezia. Delegato del Rettore per Informatica e Multimedia e nel Consiglio di Amministrazione CINECA. Presidente del comitato tecnico scientifico del Laboratorio Multimedia fDA-DADI. L'attività di ricerca riguarda la rappresentazione e l'interazione eseguite con l'utilizzo di tecniche e strumenti informatici e la predisposizione di software specifici. Responsabile scientifico di varie unità di ricerca nell'ambito di convenzioni e di progetti ministeriali PRIN e FIRB.

**Graziano Mario Valenti**, architetto, è docente di Modellazione digitale e Computer grafica nei corsi di Laurea Magistrale e Specialistica in Disegno Industriale presso la Facoltà di Architettura «L. Quaroni» della «Sapienza» Università di Roma. Ricercatore nell'area del disegno, ha sviluppato come principali temi di ricerca: la parametrizzazione dei modelli digitali orientati al progetto e al rilievo, sia in ambito architettonico che per il prodotto industriale; la gestione e la rappresentazione virtuale, real-time e interattiva, di modelli tridimensionali digitali distribuiti su rete geografica; la progettazioni di prodotti di comunicazione visiva bidimensionali, generati per proiezione di spazi tridimensionali.

# Prefazione

Questo secondo volume della Geometria descrittiva è, essenzialmente, dedicato alle applicazioni dei metodi e delle costruzioni trattate nel primo. Le applicazioni riguardano due domini della nostra scienza: lo studio delle figure geometriche nel piano e nello spazio, e lo studio delle forme complesse del design e dell'architettura, e cioè il progetto.

La prima parte del libro raccoglie teorie e tecniche della rappresentazione matematica e della rappresentazione numerica, esaminate nei rispettivi ambiti di applicazione, che sono quelli della modellazione per superfici e per solidi e della modellazione per poligoni e per superfici di suddivisione. Gli Autori di questi capitoli descrivono quei principi generali e quegli accorgimenti pratici che permettono ad un lettore attento di orientarsi con sicurezza nell'apprendimento dei software dedicati a questi due diversi metodi di rappresentazione.

Nella seconda parte, i metodi suddetti sono applicati alla costruzione e allo studio delle figure che sono argomento tradizionale della geometria descrittiva: vale a dire le linee curve, piane e sghembe, e le superfici, rigate, sviluppabili, di rivoluzione, etc. I metodi digitali, e particolarmente quello matematico<sup>1</sup>, mostrano qui tutta la loro efficienza, prima nel momento della genesi geometrica, ovvero della costruzione della forma, poi nel momento della verifica sperimentale delle proprietà geometriche della stessa.

Questa verifica, avvalorata dalla accuratezza mi-

crometrica della rappresentazione, ha piena dignità di strumento dell'indagine geometrica, e si propone come *metodo di dimostrazione esistenziale*, per usare una efficace espressione di Gino Loria.

Nella terza parte, i medesimi metodi sono applicati alla costruzione e allo studio di forme che ricorrono nel progetto dell'architettura e del prodotto industriale; i poliedri, come prefigurazione delle strutture reticolari; gli archi e le volte; i tetti, nelle varie conformazioni imposte dalle ipotesi di progetto; la stereotomia della pietra, quanto mai attuale dopo l'introduzione delle macchine di taglio a controllo numerico; la stereotomia del legno e infine gli effetti della luce sui corpi, ovvero la rappresentazione delle ombre e del chiaroscuro.

Questo elenco non esaurisce, evidentemente, il campo assai più vasto delle applicazioni della geometria descrittiva (si pensi, ad esempio, alla costruzione degli ingranaggi, al disegno dell'ordine architettonico ecc.), ma offre alcuni esempi del rapporto tra la teoria geometrica descrittiva, la speculazione geometrica e il progetto, e del potenziamento di questa sinergia indotto dai sistemi digitali.

Le rappresentazioni digitali, infatti, non solo rendono più facili e rapidi risultati espressivi che richiederebbero, altrimenti, giornate di lavoro, ma potenziano il valore euristico dell'atto rappresentativo.

Quel «fornire continui esempi del passaggio dal noto all'ignoto», che è tipico del disegno geometri-

<sup>1</sup> In particolare, il software **Think3Design** è lo strumento principe della rappresentazione matematica trattata in questo libro. Questo programma può essere scaricato liberamente al seguente indirizzo: [http://www.migliari.it/download/td\\_2008.zip](http://www.migliari.it/download/td_2008.zip).

Docenti e studenti delle scuole e delle università possono richiedere la licenza d'uso gratuita a: <http://www.think3.com/it/contatti/contatti?frompg=educational> specificando, nel *form*, il titolo di questo libro. Al medesimo sito si può accedere anche attraverso la scheda del libro sul sito [www.utetuniversita.it](http://www.utetuniversita.it).

co, nella celebre definizione mongiana, è reso qui ancor più evidente dalla possibilità di esaminare non una ma innumerevoli visualizzazioni della for-

ma studiata e, per di più, nel flusso di interrogazioni e risposte istantanee che è tipico della interazione uomo-macchina.

*Riccardo Migliari*



# Gli archi e le volte

Riccardo Migliari e Federico Fallavollita\*

## 2.1 Nomenclatura e classificazione generale degli archi e delle volte

Occorre innanzitutto distinguere le strutture destinate a coprire le discontinuità di un muro dalle strutture destinate a ricoprire interi ambienti. Chiameremo *archi* le prime, *volte* le seconde.

Archi e volte sono, per elezione, strutture curve, tuttavia entrambe possono essere costruite anche in piano o con lievissime frecce o monte: chiameremo queste particolari costruzioni *piattabande*, siano esse destinate a coprire un varco, sia un intero ambiente.

Elementi di comune nomenclatura per archi, volte e piattabande sono (figura 2.1):

- i *conci*, cioè i blocchi di pietra che formano la struttura;
- i *filari*, che sono i ricorsi orizzontali dei conci o dei mattoni;
- i *letti* che sono i piani sui quali poggiano, gli uni sugli altri, i conci o i mattoni; i letti sono, di regola, perpendicolari all'intradosso;
- la *chiave*, che è il concio più alto dell'arco, posto sull'asse di simmetria della struttura;
- il *cervello* (o *chiave di volta*), che è il concio più alto della volta;
- le *spalle* o *piedritti*, che sono gli appoggi della struttura;
- il *piano d'imposta*, che è la superficie superiore dei piedritti, sul quale la struttura si appoggia;
- l'*intradosso*, che è la superficie inferiore della struttura;
- il *sesto* o *profilo*, che è la sezione verticale dell'intradosso;
- le *linee d'imposta*, che staccano l'intradosso dalla superficie interna dei piedritti;
- gli *archi d'imposta*, che sono i profili che delimitano sul fronte l'intradosso delle volte;
- la *linea di chiave*, che è, nelle volte a sviluppo lineare, il luogo geometrico descritto dai punti ove la tangente è orizzontale;
- la *corda* o *luce*, che è la distanza tra i piedritti;
- la *frecchia* o *saetta* o *monta* che è la distanza tra il piano di imposta e il punto più alto dell'intradosso;
- l'*estradosso*, che è la superficie superiore della struttura;
- il *rinfianco*, che è la muratura destinata a contenere le spinte laterali della struttura e a riportare in piano l'estradosso;
- gli *speroni* e le *porcelle*, che sono strutture di alleggerimento del rinfianco;
- le *fronti*, che sono le superfici verticali che delimitano la struttura;
- le *reni*, che sono le parti della struttura comprese tra i piedritti e i letti il cui angolo di pendio è più vicino ai 30°;

\* Riccardo Migliari ha curato i paragrafi 2.1 e 2.2, Federico Fallavollita i paragrafi 2.3 e 2.4.



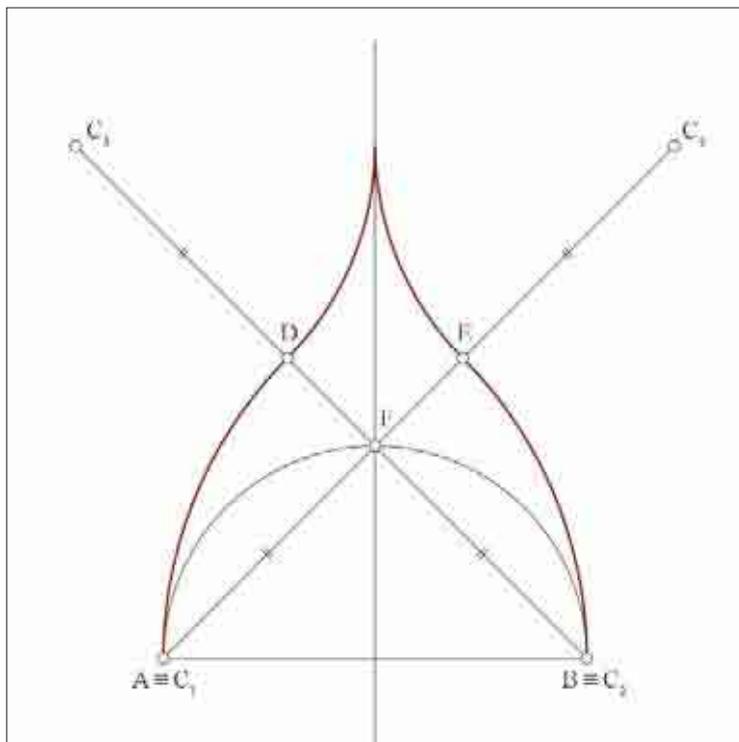


Fig. 2.21

i quattro archi di circonferenza di centro  $C_4$  e  $A, B$  e  $C_1$  che si intersecano, due a due, nei punti  $C_2$  e  $C_3$ , rispettivamente a destra e a sinistra dell'asse. Si costruiscono le rette  $C_1C_2$  e  $C_3C_4$  e si descrive infine il profilo come segue: centro in  $C_1$ , raggio  $C_1A$  fino a incontrare la  $C_1C_2$  in  $D$ ; centro in  $C_2$ , raggio  $C_2D$ , a riprendere la curva e così via con centri in  $C_3$  e  $C_4$ .

#### Sesto siriano rilevato da Mauss-Choisy

Con centro in  $O$  si descrive una circonferenza di raggio pari a un ottavo della corda  $AB$  (figura 2.23); questa stacca, sulla corda stessa, i due centri  $C_2$  e  $C_1$ . Perciò, nominando, nell'ordine, i quattro punti così

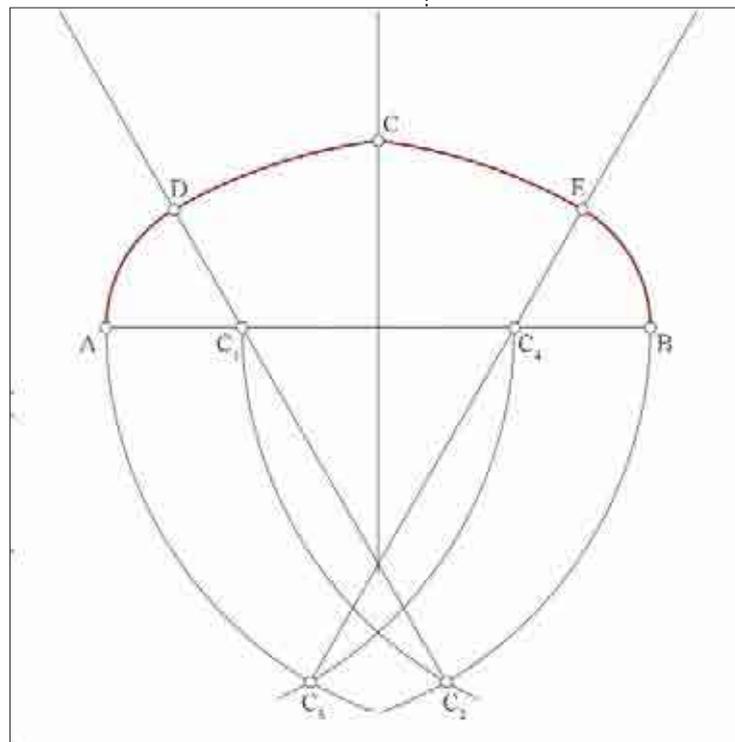


Fig. 2.22

determinati  $A, C_2, C_1, B$  si disegna il profilo con centro in  $C_2$  e raggio  $C_2B$ , con centro in  $C_1$  e raggio  $C_1A$ .

### 2.3 Le volte semplici

La rappresentazione matematica consente di costruire le volte in ogni loro dettaglio, tenendo conto degli spessori delle murature e seguendo logiche che sono assai vicine a quelle del cantiere.

Occorre, tuttavia, tenere presente alcuni aspetti peculiari della modellazione digitale.

In primo luogo: è bene rappresentare separatamente l'intradosso e l'estradosso della struttura, per chiudere poi gli spessori e convertire le superfi-

Fig. 2.21 Sesto acuto a inflesso o a coda o a chiglia

Fig. 2.22 Sesto Tudor

Fig. 2.23 Sesto siriano rilevato da Mauss-Choisy

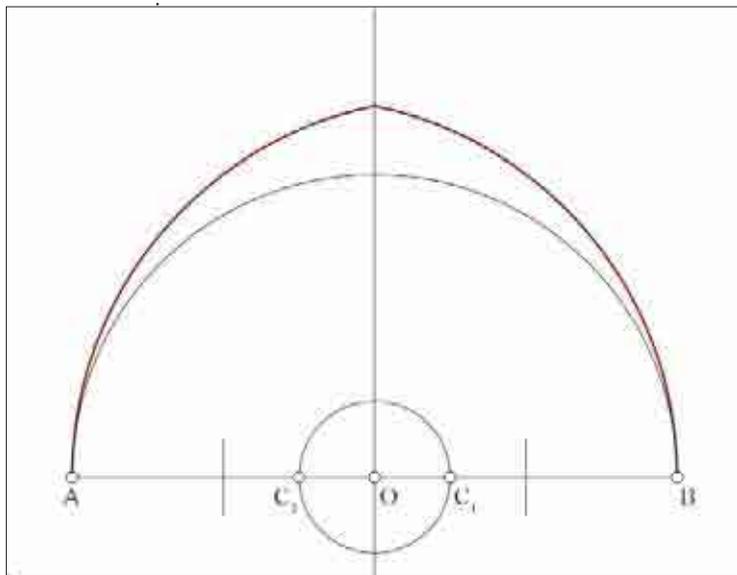


Fig. 2.23

ci così costruite in un solido. Certe scorciatoie, come l'impiego di lavorazioni offset, a guscio, spesso comportano errori. Ad esempio, se si modella un'unghia, che è una porzione triangolare di superficie cilindrica, e si applica uno degli automatismi che costruiscono automaticamente lo spessore, come, appunto, la lavorazione a guscio, si ottiene un risultato incompatibile con la composizione di questo elemento con gli altri, identici, che formano la volta a crociera.

In secondo luogo, bisogna sempre ricordare che le superfici NURBS sono quadrilateri, ragion per cui, ove sia necessario costruire una superficie che non ha quattro lati, ma tre o un numero maggiore di quattro, si deve generare una superficie più estesa per poi tagliarla secondo le necessità della forma. Esiste un algoritmo, noto come *capping*, che si occupa di compiere automaticamente questa operazione (vedi il paragrafo 1.7.4 nella prima parte di questo volume). Lo si utilizza, ad esempio, nelle unghie

sferoidiche che presentano, appunto, tre soli bordi. La superficie di capping è determinata quando siano date, almeno, le tre curve che la delimitano e una curva interna: rigenerando la superficie è possibile osservare l'aspetto della NURBS intera, prima del taglio lungo i bordi assegnati.

Un'ultima osservazione di carattere generale riguarda invece l'impostazione delle viste più adatte a controllare la forma di una volta, che poi è anche il modo di presentarla in una immagine statica, come, ad esempio, un chiaroscuro. Le volte sono strutture interne agli edifici e dunque il modo più naturale di osservarle è dall'interno dello spazio che racchiudono e dal basso verso l'alto. Inoltre le volte sono strutture avvolgenti e, di conseguenza, se non si vuole usare la prospettiva, come avviene nella rappresentazioni di carattere tecnico, bisogna di necessità sezionarle, per evitare che parti della struttura restino nascoste. Queste sezioni si fanno con piani che passano per il cervello o per le linee di chiave.

Le viste dall'alto verso il basso debbono essere riservate allo studio dell'estradosso, ricordando, però, che questa parte della struttura non è quasi mai visibile se non in un cantiere di restauro.

### 2.3.1 La volta a botte a tutto sesto e retta

L'intradosso della volta a botte è una superficie cilindrica. Il profilo, che è la generatrice di questo cilindro, è un arco a tutto sesto. Se l'asse della volta è perpendicolare al piano del profilo, la volta è circolare *retta*; se l'asse è obliquo ma orizzontale, la volta è *obliqua*; se l'asse è inclinato la volta è *rampante* o, anche, *obliqua* e *rampante*. Il profilo può anche essere ribassato o rialzato e anche a sesto acuto, nel qual caso l'intradosso della volta è costituito da due cilindri ad assi paralleli che s'intersecano in chiave.

Per costruire la volta a botte cilindrica si definiscono gli elementi di riferimento e gli elementi generatori: in primo luogo si stabilisce il piano di im-

posta orizzontale, poi il profilo e infine l'asse e le linee di imposta ad esso parallele.

### Costruzione della volta a botte retta

Si assume il piano di imposta coincidente con il piano di riferimento  $xy$  (figura 2.24). Si immagina la volta tagliata da due piani verticali: uno sul fronte e uno sulla linea di chiave.

La sezione della volta, sul fronte, è costituita dal piedritto, che prosegue per un breve tratto oltre il piano di imposta, con una risega, dai due archi di circonferenza dell'intradosso e dell'estradosso, e da una retta inclinata a  $30^\circ$  circa, che nasce nel centro dei due profili curvi e taglia il piedritto. La parte della struttura che si trova sotto questa linea è piena e portante, e si chiama *rinfianco*; la parte che si trova sopra è vuota o riempita con materiale leggero o con altre strutture intermedie: si tratta di una struttura portata che serve a dare appoggio alle strutture orizzontali sovrastanti.

Dopo aver tracciato il profilo, si stabilisce l'asse, che in questo caso è perpendicolare al fronte della volta, mentre è inclinato verso l'alto in quella rampante e lateralmente in quella obliqua.

Si costruiscono poi le superfici piane e cilindriche generate per traslazione nella direzione dell'asse, dal perimetro dei piedritti, dal rinfianco e dai profili dell'intradosso e dell'estradosso.

Si chiude il solido con le superfici piane del fronte e lo si implode.

### 2.3.2 La volta a vela

L'intradosso e l'estradosso di una volta a vela sono porzioni di superficie sferica. Questo tipo di volta può coprire, almeno in teoria, qualsiasi ambiente, anche di forma irregolare. Supponiamo, ad esempio, di voler costruire una volta a vela su un ambiente che ha il perimetro nel poligono chiuso **ABCDEF** (figura 2.25). Preso un punto qualsiasi **O** inter-

no al perimetro, potremo sempre costruire una circonferenza e capace di contenere il suddetto perimetro, senza necessariamente toccarne i vertici. Perciò potremo costruire la semisfera che ha **e** come equatore e tagliare questa semisfera con i piani verticali che passano per il lati del poligono suddetto.

La forma che si ottiene in questo modo è una calotta sferica irregolare che verrà realizzata fissando un'asta rigida di lunghezza eguale al raggio nel punto **O**. Quest'asta si chiama *randa* e, nella pratica

Fig. 2.24 Costruzione della volta a botte retta

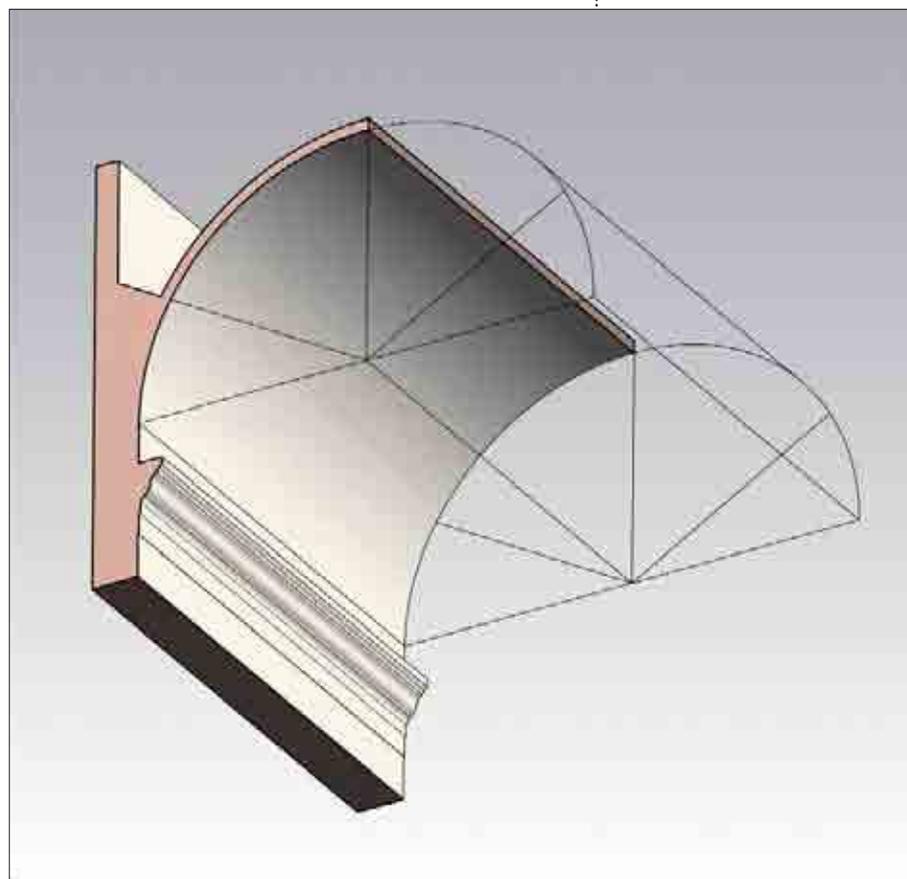
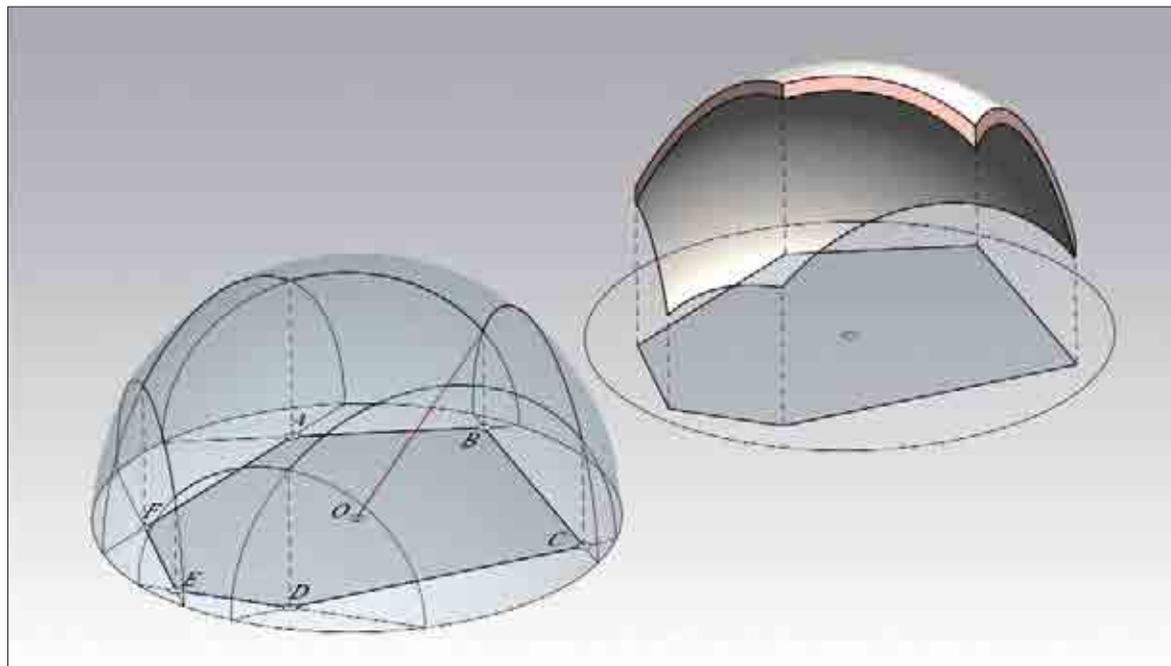


Fig. 2.24

**Fig. 2.25** Volta a vela su un ambiente poligonale



**Fig. 2.25**

del cantiere, può guidare il posizionamento dei mattoni o dei conci della volta, come anche il disegno degli archi di imposta. Questi archi saranno tutti del tipo incompleto, vale a dire archi di circonferenza che sottendono angoli in generale minori di un angolo piatto e i punti che avranno in comune e che corrispondono, nella forma realizzata, ai *peducci* della volta, avranno quote diverse.

Infatti, il poligono irregolare **ABCDEF** non può essere iscritto nella circonferenza e, al più, tre soli suoi vertici possono appartenere alla circonferenza e, di conseguenza, le circonferenze intersezione con la superficie sferica dell'intradosso dei piani verticali che passano per i lati del poligono non possono incontrarsi sulla circonferenza e e perciò si trovano in quota, al di sopra del piano di imposta.

È dunque evidente che la volta a vela può essere

meglio impostata su impianti di forma regolare, come di norma avviene, e precisamente su impianti rettangolari e su impianto quadrato.

#### **La volta a vela su impianto rettangolare**

Dato il rettangolo di lati **ABCD**, e un rapporto tra i lati (*figura 2.26*), ad esempio 3:4 (*diatessaron*), e considerato il fatto che il rettangolo si può inscrivere in una circonferenza, la volta a vela può essere impostata su quattro archi a tutto sesto, le cui corde e frecce stanno nel medesimo rapporto.

Per costruirla conviene appunto cominciare dagli archi di imposta, come nella realtà:

- si costruisce un primo arco, lo si taglia con i piani diagonali del piedritto, lo si copia sul fronte opposto;

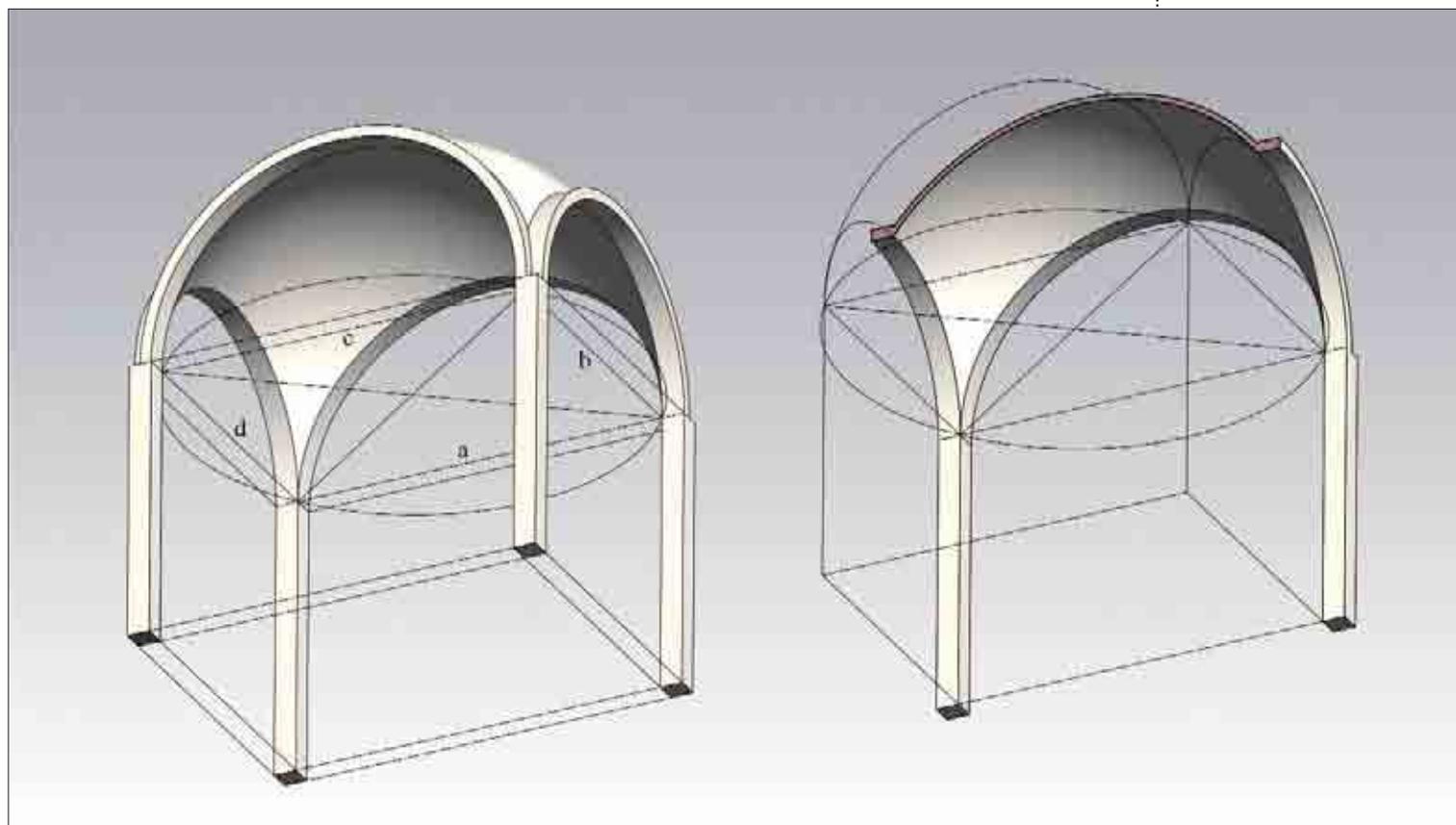
- si costruiscono il terzo e il quarto arco in modo analogo;
- si costruisce la superficie di intradosso come superficie sferica e la si taglia con l'equatore e con le fronti che gli archi di imposta rivolgono all'interno dell'ambiente voltato;
- si costruisce la superficie di estradosso alla stessa maniera, o come offset dell'intradosso e la si taglia con le fronti degli archi, come sopra si è detto;
- finalmente, si chiudono i bordi dell'intradosso e dell'estradosso a formare lo spessore della volta.

In sezione, la volta a vela appare come in figura.

#### **La volta a vela su impianto quadrato**

Quando è impostata su un quadrato, la volta a vela ha gli archi di imposta eguali. In tutto il resto, la costruzione è analoga a quella della medesima volta su impianto rettangolare.

**Fig. 2.26** Volta a vela su impianto rettangolare



**Fig. 2.26**

### 2.3.3 La volta a vela a sesto incompleto o volta boema

La volta a vela che abbiamo costruito nel paragrafo precedente si sviluppa in altezza per metà della sua corda massima. Ad esempio, nel caso dell'impianto rettangolare i cui lati misurano 3 e 4 unità, la diagonale misura 5 e perciò l'altezza dell'intradosso, a partire dal piano di imposta, misura 2,5 unità. Se, ad esempio, volessimo coprire con questo tipo di volta un ambiente di sei metri per otto, ponendo il piano di imposta della volta a tre metri di quota, dovremmo disporre di un'altezza di otto metri (tre del piano di imposta più cinque di sviluppo della volta), senza tenere conto degli spessori. È chiaro dunque che questa volta si presta solo a grandi opere.

Esiste però una soluzione che può essere adottata anche in edifici molto più modesti e consiste nel ribassare il centro della superficie di intradosso rispetto al piano di imposta.

Supponiamo, ad esempio, di dover voltare il medesimo ambiente di perimetro rettangolare dell'esempio precedente, nel quale i lati stanno nel rapporto 3:4. E supponiamo, ancora, di poter disporre, in altezza, di una sola unità, anziché delle due unità e mezzo necessarie.

Potremo, allora, ribassare il centro **O** in modo che la superficie dell'intradosso abbia il punto più alto a un metro di quota sul piano di imposta, toccando pur sempre i vertici del perimetro dell'ambiente da voltare.

Per far ciò, costruiamo il punto **P**, sulla verticale **v** per il centro del perimetro **ABCD** e consideriamo il piano **APC** (figure 2.27, 2.28): questo piano deve tagliare la superficie sferica di intradosso secondo un arco di circonferenza **APC**. Il centro **O** di quest'arco deve trovarsi sulla verticale **v** e sulla perpendicolare alla corda **PC** (o **AP**), tracciata nel piano **APC**.

La sfera di centro **O** e raggio **OP** viene tagliata dai piani verticali costruiti sui lati del rettangolo di

imposta, piani indefinitamente estesi, secondo profili di arco a sesto incompleto che passano per i vertici **A**, **B**, **C** e **D**.

Questi profili definiscono gli archi di imposta della volta, che possono essere costruiti come nel caso precedente, facendo rivolgere la sagoma del mattone intorno all'asse di rivoluzione per una ampiezza pari alla ampiezza angolare dell'arco, che deve essere misurata preventivamente.

I solidi così ottenuti si tagliano con piani verticali e tra un solido e l'altro si inserisce un concio parallelepipedo che ha il compito di reggere e distribuire le spinte. Questo concio poggia sul piedritto.

La costruzione si completa con l'estradosso e gli spessori della volta, come nel caso precedente.

Come si può constatare, questo tipo di volta, detta *volta boema* o *a sesto incompleto*, misura in altezza circa i due terzi di quella a tutto sesto.

### 2.3.4 La volta anulare

La volta anulare è una volta a botte che si sviluppa su una direttrice curvilinea. Un classico esempio di volta anulare è quella che copre l'ambulacro esterno del Colosseo.

Per costruirla bisogna estrarre il profilo, a tutto sesto, lungo la direttrice (figura 2.29). Questa linea, nel caso del Colosseo, è un ovale policentrico quasi indistinguibile da un'ellisse. Questo particolare disegno consente di tracciare facilmente le linee di imposta come curve concentriche, mantenendone fissa la distanza, cosa che non sarebbe possibile se l'impianto fosse ellittico<sup>1</sup>.

La costruzione della volta semplice, con il suo spessore, non presenta nessun problema.

### 2.3.5 La volta elicoidale o vite di Saint-Gilles

La superficie di intradosso della volta elicoidale è una vite di Saint-Gilles (vedi figura 108 del paragra-

<sup>1</sup> Non è possibile tracciare una ellisse che sia in ogni punto equidistante da un'altra data, perché, preso su una delle due ellissi un punto qualsiasi che non appartenga agli assi, non esiste una retta che passi per quel punto e sia perpendicolare a entrambe le ellissi.

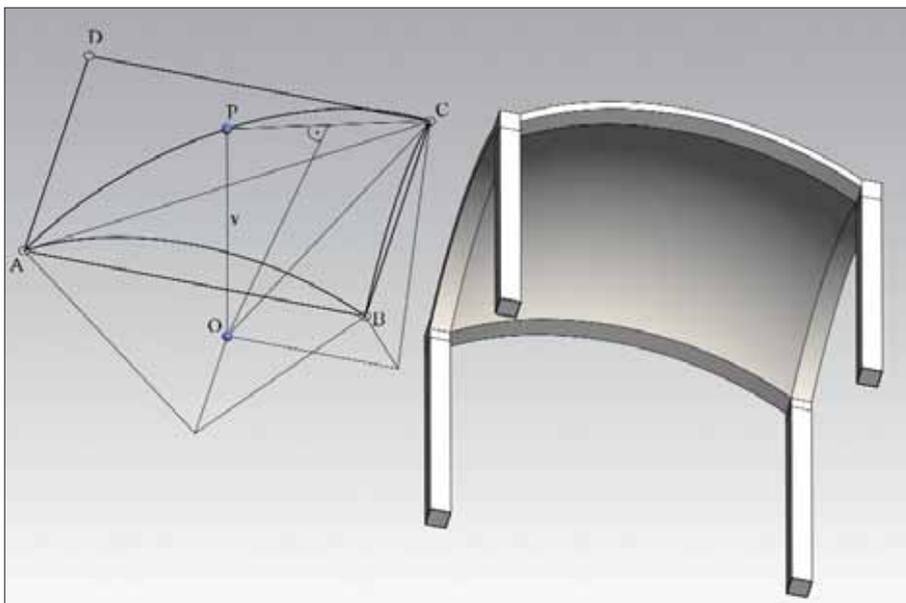


Fig. 2.27

fo 2.6 nella parte seconda di questo volume). Si tratta di una volta anulare rampante, molto frequentemente impiegata nella copertura delle rampe a chiocciola (dette anche *lumache*) (figura 2.30).

La costruzione della volta elicoidale richiede, innanzitutto, il calcolo dell'altezza e del passo dell'elica direttrice. Questo calcolo si fonda sulla pendenza della rampa e sull'altezza della sezione. Supponiamo, ad esempio, di voler dare alla rampa una pendenza non superiore all'8% e alla sezione una altezza massima di 3 metri e 60 centimetri. Allora la proiezione orizzontale dell'elica dovrà essere una circonferenza lunga 45 metri ( $0,08 * 45 = 3,60$ ). Il passo dell'elica misurerà 3 metri e 60 come la sua altezza. In questo modo la rampa salirà una altezza pari al proprio ingombro, dopo aver percorso un giro completo.

La struttura si costruisce disegnando la sezione, alla partenza e all'arrivo dell'elica, per poi eseguire

la rototraslazione dei profili lungo l'elica (figura 2.31).

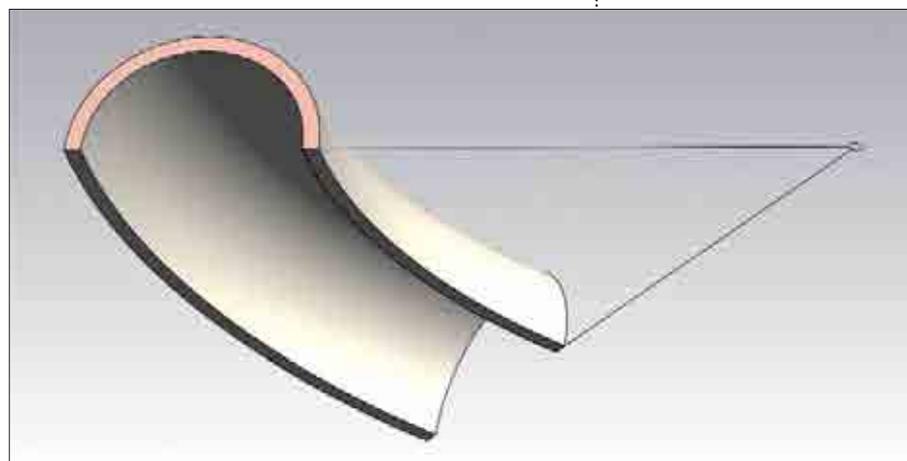


Fig. 2.29

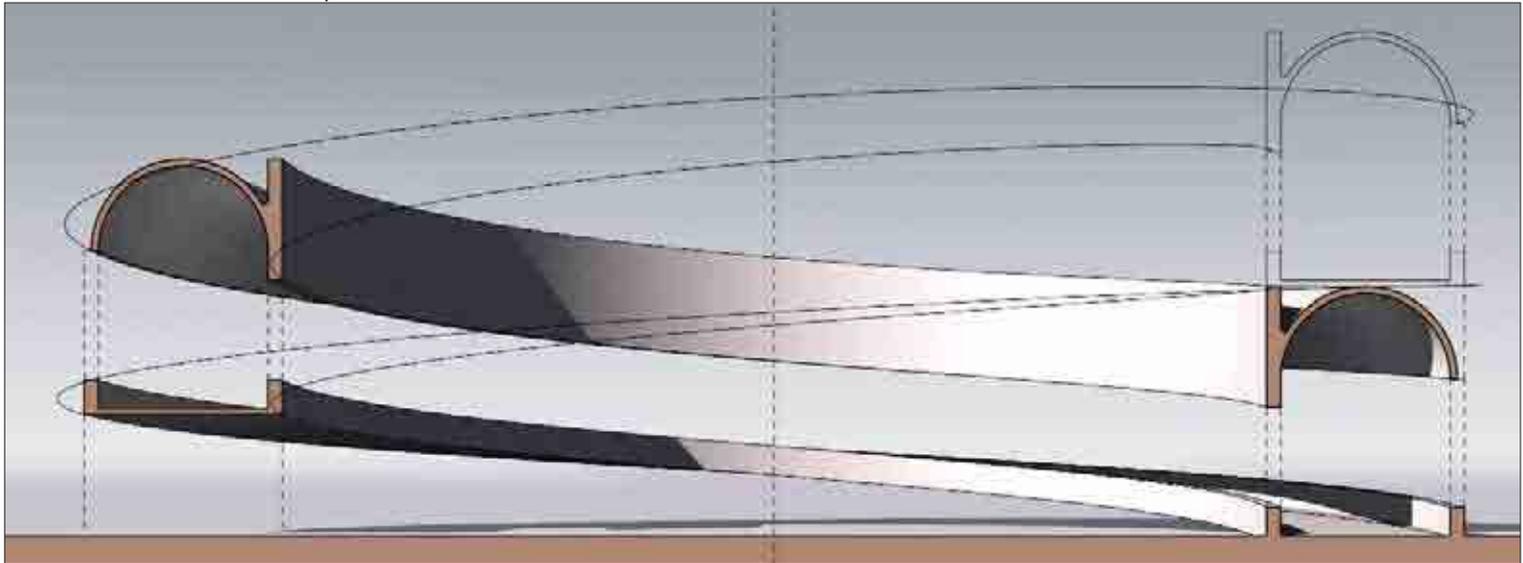


Fig. 2.28

Fig. 2.27 Volta a vela a sesto incompleto o volta boema

Fig. 2.28 Spaccato assometrico della volta a sesto incompleto

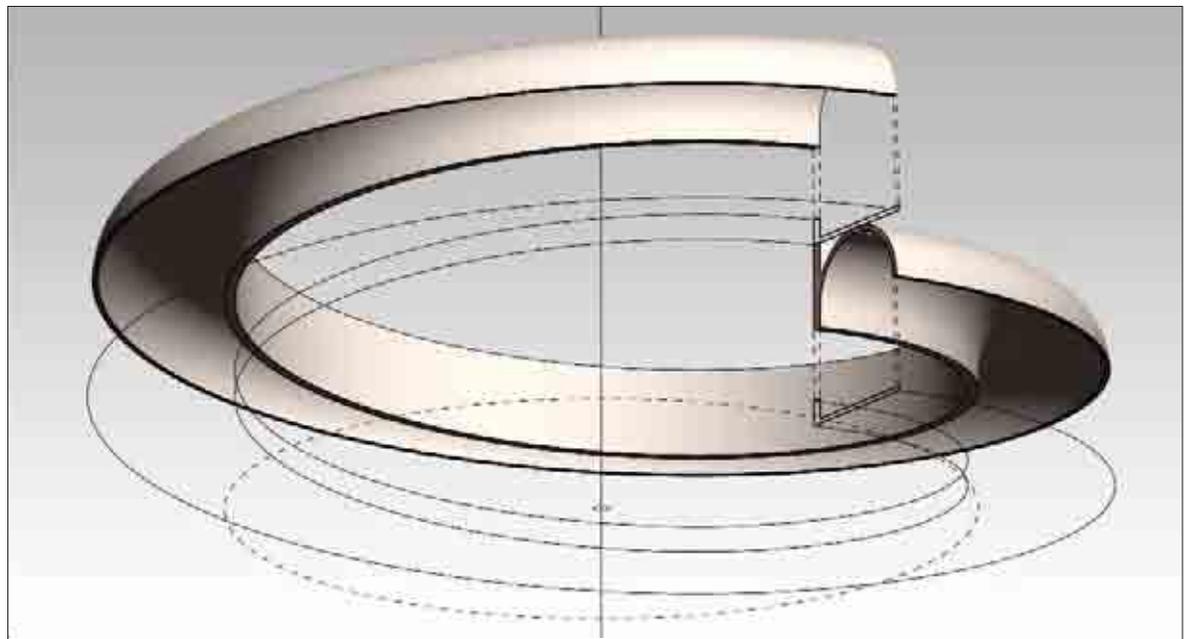
Fig. 2.29 Volta anulare



**Fig. 2.30**

**Fig. 2.30** Rappresentazione della volta elicoidale o vite di Saint – Gilles

**Fig. 2.31** Costruzione della volta elicoidale



**Fig. 2.31**

### thinkdesign

- *Inserisci / Superfici / Estrusione globale* – Modalità di movimento: *Asse costante*.

#### 2.3.6 La cupola

L'intradosso di una cupola è, di norma, una superficie emisferica. Nelle cupole barocche l'estradosso presenta invece un profilo rialzato, ovale o ellittico e frequentemente è realizzato come un padiglione (vedi il paragrafo 2.4.2). Spesso tra queste due superfici è presente uno spazio vuoto di alleggerimento (figura 2.32).

## 2.4 Le volte composte

### 2.4.1 Le volte lunettate

La lunetta è l'apertura semicircolare che si fa nel fianco di una volta a botte per dare luce all'ambiente (figura 2.33). Tra l'arco della lunetta e la volta, in particolare attraverso il rinfiaccio, si apre dunque un breve passaggio che può essere coperto in due modi: con una superficie cilindrica e con una superficie di forma simile a una porzione di ellissoide. Queste due soluzioni si chiamano: *lunetta cilindrica* e *lunetta sferoidica*, rispettivamente. Entrambe si costruiscono tagliando le superfici della volta a botte che abbiamo già descritto.

#### **La volta a botte lunettata cilindrica**

Per costruire la lunetta cilindrica si proietta, innanzitutto, la linea di imposta della volta sulla parete esterna del piedritto (figura 2.34). Qui si imposta la direttrice semicircolare dell'estradosso della lunetta e la relativa superficie cilindrica, normale alla parete.

Si costruisce poi la superficie dell'intradosso, a una distanza dalla prima pari allo spessore della struttura.

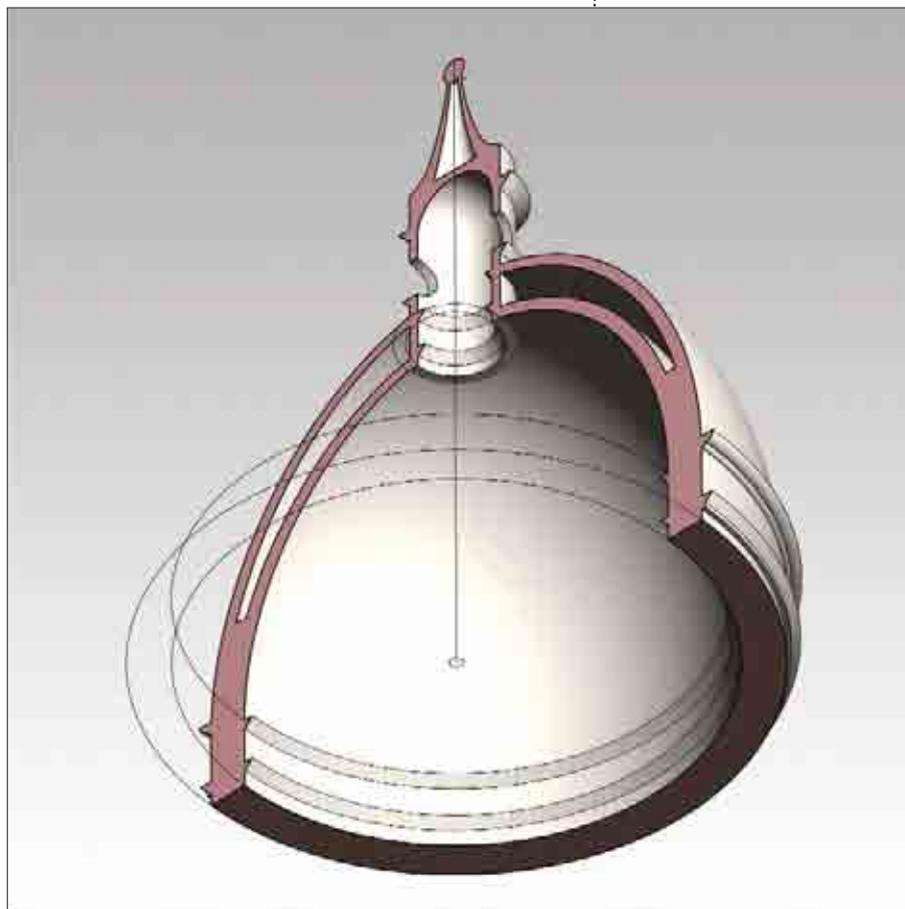


Fig. 2.32

Infine si genera un piano, per la larghezza della lunetta, adiacente al piano di imposta della volta.

Con questo piano e la superficie di estradosso si tagliano tutte le superfici estradosstate della struttura principale; mentre con la superficie di intradosso e il medesimo piano si tagliano le corrispondenti superfici di intradosso della struttura principale e la parete esterna.

Fig. 2.32 Schema di cupola

# Bibliografia

- AA.VV., *Ikhnos, Analisi grafica e storia della rappresentazione*, Lombardi, Siracusa 2005.
- BAEHMANN P.L., WITTCHEM S.L., SHEPHARD M.S., GRICE K.R., YERRY M.A., *Robust Geometrically-based, Automatic Two-Dimensional Mesh Generation*, «International Journal for Numerical Methods in Engineering», vol. 24, 1987.
- BARTOLINI BUSSI M.G., MASCHIETTO M., *Macchine Matematiche: Dalla storia alla Scuola*, Springer-Verlag, Milano 2006.
- BATTINI C., FANTINI F., *Clouds and Clay. Superfici di suddivisione e ottimizzazione*, in L. DE CARLO (a cura di), *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*, Gangemi, Roma 2007, pp. 175-80.
- BOYER C.B., *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano 2004.
- BREYMANN A.G., *Trattato generale di costruzioni civili*, Milano 1885.
- BURT M., *Saddle Polyhedra & Close-Packing*, «Zodiac», 22, Milano 1973.
- CANANN S.A., MUTHUKRISHNAN S.N., PHILLIPS R.K., *Topological Refinement Procedures for Triangular Finite Element Meshes*, «Engineering with Computers», vol. 12, 1996.
- CATMULL E., CLARK J., *Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes*, «Computer Aided Design», IPC Business Press, 10, 1978.
- CLAIRAUT A.C., *La recherche sur le corbes à double courbure*, Noyon, Didot e Quillaut, Parigi 1732.
- DE LA GOURNERIE J., *Traité de Géométrie descriptive*, Parigi 1860.
- DOCCI M., MIGLIARI R., *La costruzione della spinapesce nella copertura della sala ottagonale di Simon Mago nella fabbrica di San Pietro*, «Palladio», II, 3, giugno 1989.
- EMMER M., *Art and Mathematics: the Platonic Solids*, «Leonardo», vol. 15, n. 4, 1982.
- EMMER M., *Dai radiolari ai vasi di Gallè*, in M. EMMER (a cura di), *Matematica e Cultura 2007*, Springer-Verlag, Milano 2007.
- EMMER M., *Le Bolle di Sapone*, in M. EMMER (a cura di), *L'occhio di Horus. Itinerari nell'immaginario matematico*, Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, Roma 1989.
- EMMER M. (a cura di), *L'occhio di Horus. Itinerari nell'immaginario matematico*, Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, Roma 1989.
- EULER L., *Elementa Doctrinae Solidorum*, Pietroburgo, 1758.
- FANO G., *Lezioni di Geometria Descrittiva, date nel R. Politecnico di Torino*, Torino 1925.
- FAROUKI R.T., *Optimal parameterizations*, «Computer Aided Geometric Design», vol. 14, 1997.
- FIELD D.A., *Laplacian Smoothing and Delaunay Triangulations*, «Communications in Applied Numerical Methods», vol. 4, 1988.
- FOLEY D.J., VAN DAM A., FEINER K.S., HUGHES F.J., *Computer Graphics, Principles and Practice*, Addison-Wesley, Boston 1997.
- FOLINEA R., *Architettura Pratica*, s.l., s.d.
- FRÉZIER A.F., *Traité de stéréotomie*, tomo I, libro III, Strasburgo-Parigi, 1737.

- FULLER R.B., MARKS R., *The Dymaxion World of B. Fuller*, A Doubleday Anchor Book, New York, 1973.
- GARIO P., *L'immagine geometrica del mondo: storia dei poliedri*, Stampatori Editore, Torino 1979.
- GEORGE P.L., HECHT F., SALTZ E., *Automatic Mesh Generator with Specified Boundary*, «Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering», vol. 92, North-Holland, 1991.
- GHEORGHIU A., DRAGOMIR V., *Geometry of Structural Forms*, Applied Science Publisher LTD, Bucarest 1978.
- HACHETTE J.N.P., *Correspondence sur L'École royale polytechnique, à l'usage des élèves de cette école*, Tome III, M.me Courcier Imprimerie, Parigi 1814-1816.
- HACHETTE J.N.P., *Traité de Géométrie Descriptive*, Corby, Parigi 1828.
- HASELBERGER L., *Bericht über die Arbeit am Jüngerem Apollontempel von Didyma*, «Istanbuler Mitteilungen», 33, 1983, pp. 90-123.
- HASELBERGER L., *Ein Giebelriss der Vorhalle des Pantheon die Werkrisse vor dem Augustusmausoleum*, «Mitteilungen des Deutschen Archäologischen Instituts, Römische Abteilung», 101, 1994, pp. 279-308.
- HASELBERGER L., *The Construction Plans for the Temple of Apollo at Didyma*, «Scientific American», 253/6, 1985, pp. 114-22.
- HASELBERGER L., *Un progetto architettonico di 2000 anni fa*, «Le Scienze», 324, 1995.
- HASELBERGER L., *Werkzeichnungen am Jüngerem Didymeion. Vorbericht*, «Istanbuler Mitteilungen», 30, 1980, pp. 191-215.
- HOFFMAN D., *The Computer Aided Discovery of New Embedded Minimal Surfaces*, «The Mathematical Intelligencer», vol. 9, 1987.
- KLINE M., *Storia del pensiero matematico, dall'antichità al settecento*, I vol., Biblioteca Einaudi, Torino 1972.
- LAU T.S., LO S.H., *Finite Element Mesh Generation Over Analytical Surfaces*, «Computers and Structures», vol. 59, 2, 1996.
- LEROY C.F.A., *Traité de Stéréotomie comprenant les applications de la géométrie descriptive a la théorie des ombres, la perspective linéaire, la gnomonique, la coupe des pierres et la charpente*, G-Villars, Parigi 1870.
- LO S.H., *Generating Quadrilateral Elements on Plane and Over Curved Surfaces*, «Computers and Structures», vol. 31, 1989.
- LO S.H., *Volume Discretization into Tetrahedra-I. Verification and Orientation of Boundary Surfaces*, «Computers and Structures», vol. 39, 5, 1991.
- LOHNER R., PARIKH P., GUMBERT C., *Interactive Generation of Unstructured Grid for Three Dimensional Problems*, «Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics», 88, Pineridge Press, pp. 687-97, 1988.
- LORIA G., *Curve piano speciali algebriche e trascendenti, teoria e storia*, 2 voll., Zanichelli, Bologna 1925 (seconda edizione Hoepli, Milano 1930).
- LORIA G., *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti*, vol. II, Zanichelli, Bologna 1925
- LORIA G., *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Hoepli, Milano 1914.
- LORIA G., *Metodi matematici*, Hoepli, Milano 1935.
- LORIA G., *Poliedri, curve e superfici secondo i metodi della Geometria descrittiva*, Hoepli, Milano 1912.
- MARCOLLI A., *Teoria del campo 2*, Sansoni Editore, Firenze 1991.
- MARCUM D.L., WEATHERILL N.P., *Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection*, «AIAA Journal», vol. 33, 9, settembre 1995.
- MIGLIARI R., *Dieci lezioni di geometria descrittiva. La teoria delle ombre e del chiaroscuro. Il modello geometrico del moto apparente del Sole*, «Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva», 3, Roma, 1984.
- MIGLIARI R., *Geometria dei modelli*, Kappa Edizioni, Roma 2003.

- trico del moto apparente del Sole, «Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva», 3, Roma, 1984.
- MIGLIARI R., *Geometria dei modelli*, Kappa Edizioni, Roma 2003.
- MIGLIARI R., *Ha la prospettiva un futuro? (Has man a future?)*, in *Ikhmos, Analisi grafica e storia della rappresentazione*, Lombardi, Siracusa 2005.
- MIGLIARI R., *Le cupole geodetiche: guida all'uso di un'utopia*, Edizioni Kappa, Roma 1975.
- MIGLIARI R., *Rappresentazione come sperimentazione*, in AA.VV. *Ikhmos, analisi grafica e storia della rappresentazione*, Lombardi, Siracusa 2005.
- MONGE G., *Géométrie Descriptive, leçons données aux Écoles Normales, l'an III de la République*, par Gaspard Monge, Parigi 1798.
- OLIVIER T., *Cours de Géométrie descriptive, première partie. Du point, de la droite et du plan*, Carilian-Goeury V<sup>o</sup> Dalmont, Parigi, 1852.
- OWEN S.J., CANANN S.A., SAIGAL S., *Pyramid Elements for Maintaining Tetrahedra to Hexahedra Conformability*, in AMD-Vol. 220, *Proceedings Special Session on Trends in Unstructured Mesh Generation*, Eveston (IL) 1997.
- PERI G., *Applicazioni della Geometria descrittiva alle ombre, alla prospettiva lineare ed aerea, al taglio delle pietre e del legname*, seconda edizione, Giulio Bellotti, Firenze 1884.
- PETROGNANI A., *Tecnologie dell'architettura*, Gorlich, Novara 1981.
- PILLET J., *Traité de Stéréotomie (charpente et coupe des pierres)*, Ch. Delagrave, Parigi 1887.
- PLATEAU J., *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, Parigi 1873.
- PLATONE, *Timco*, traduzione di F. Acri, introduzione e note di M.F. Sciacca, Mondadori, Milano 1942.
- PONCELET J.V., *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, Parigi 1822.
- POUDRA, *Ouvres de Desargues*, Leiber, Parigi 1864.
- QUETELET A.D., *Sciences Mathématiques et physiques au commencement du XIX siècle*, Bruxelles 1867.
- REBAY S., *Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm*, «Journal Of Computational Physics», vol. 106, 1993.
- RUPPERT J., *A New and Simple Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation*, in *Proceedings, 4th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, pp. 83-92, Austin (TX) 1993.
- SACCARDI U., *Applicazioni di Geometria Descrittiva*, Libreria Editrice Fiorentina Firenze 1976.
- SALVATORE M., *La stereotomia scientifica in Amédée François Frézier – Prodromi della geometria descrittiva nella scienza del taglio delle pietre*, Tesi di Dottorato D.P.R. 11/7/1980 – Ciclo XXI – Università degli Studi di Firenze, dicembre 2008.
- SCHOEN A.H., *Infinite Periodic Minimal Surfaces without Self-Intersection*, Electronic Research Center, National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C., 1970.
- SCOLARI M., *Il disegno obliquo. Una storia dell'antiprospectiva*, Marsilio, Venezia 2005.
- SCOTT E., *Lavorare il legno*, Zanichelli, Bologna 1983.
- SEVERI F., *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Padova 1918.
- STATEN M.L., JONES N.L., *Local Refinement of Three-Dimensional Finite Element Meshes*, «Engineering with Computers», vol. 13, 1997.
- TAUTGES T.J., BLACKER T., MITCHELL S., *The Whisker-Weaving Algorithm: A Connectivity Based Method for Constructing All-Hexahedral Finite Element Meshes*, «International Journal for Numerical Methods in Engineering», vol. 39, 1996.
- TAYLOR J.E., *The Structure of Singularities in Soap-Bubbles-like and Soap-film-like Minimal Surfaces*, «Annals of Mathematics», 103, 1976.
- TRAMONTINI G., *De Projezioni grafiche e delle loro principali applicazioni*, Modena 1811.
- TREVISAN C., *Sulla stereotomia, il CAD e le varie trom-*

- pe d'Anet, in R. Migliari (a cura di), *Geometria e Architettura, Strumenti del dottorato di ricerca in Rilievo e Rappresentazione*, Gangemi, Roma 2000, pp. 27-53.
- VILLARCEAU M., *Théorème sur le tore*, «Nouv. Ann. Math.», 7, pp. 345-47, 1848.
- WATSON D.F., *Computing the Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes*, «The Computer Journal», vol. 24(2), 1981.
- WEATHERILL N.P., HASSAN O., *Efficient Three-dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints*, «International Journal for Numerical Methods in Engineering», vol. 37, 1994.
- YERRY M.A., SHEPHARD M.S., *Three-Dimensional Mesh Generation by Modified Octree Technique*, «International Journal for Numerical Methods in Engineering», vol. 20, 1984.

# Indice analitico

- Acri, Francesco, 389  
Adding modeling, 87, 89, 92  
Affinità, 162, 219, 365  
Aggetto, 465-68  
Alzato, 155, 281, 452, 524, 528, 548  
Angolo  
  diedro, 184, 263-64, 299, 301, 303, 312, 318, 325-26, 331-32, 341, 463, 493, 495, 516  
  di pendenza, 235, 238, 242, 245  
  di pendio, 235, 245, 423, 462-83  
  solido, 302, 299, 390, 392, 590  
Angoloide, 299, 301, 398  
Antipolo, 293  
Antiprismi regolari, 315  
Antonio da Sangallo il Giovane, 141  
Apollonio di Perga, 283, 285-86, 486  
Apparecchio murario, 140-41  
Apparecchio, 489, 497-523  
Appartenenza, 136, 415, 513  
Archi d'imposta, 423  
Archimede, 487  
Arco  
  a sesto acuto, 436, 438  
  a sesto acuto a lancetta, 437  
  a sesto acuto equilatero, 437  
  a sesto acuto in quarto punto, 437  
  a sesto rialzato, 436  
  a sesto ribassato (o scemo), 430-32  
  a sesto siriano, 439  
  a sesto tedesco o a sesto acuto in terzo punto, 437  
  a sesto Tudor, 438  
  a tutto sesto, 428-30  
  frontale, 513  
Arrière voussure, 514-18  
Arvo, James, 613  
Asse  
  di rotazione, 22  
  trasverso, 253  
Assi di una quadrica, 198-203  
Astroide, 121  
Baehmann, P.L., 413  
Baglioni, Leonardo, 97, 299  
Battaile, Bennet, 609-10  
Bernoulli, Johann, 119, 125-26  
Bézier, Pierre, 13, 25  
Biais passé, 155  
Binormale, 108, 214-16  
Birapporto, 175-76  
Blacker, T., 413  
Blinn, James F., 605-607  
Bolle di sapone, 337  
Bonner, John Tyler, 237  
Bosse, Abraham, 530, 537, 540, 542, 559  
Bosse, Chris, 341  
Bottiglia di Klein, 74  
Boundary representation, *vedi* B-rep  
Bourgeois, A., 487  
Box modeling, 84-87, 92  
Boye, B., 524, 553  
Boyer, Carl, 389  
Bragg, William, 356-58  
B-rep, 11, 37, 71-72  
Brett, M., 414  
B-Spline, 15-19, 21-22  
Burt, Michael, 342, 346  
Canann, Scott A., 414, 416  
Capriata palladiana semplice, 574-76  
Capriata, 573-85  
Caratteristica di Eulero, 72  
Cartesio (René Descartes), 119, 400, 487  
Catalan, Eugene Charles, 326  
Catmull, E., 78, 87, 599  
Cauchy, Augustin Louis, 399  
Caustica, 103-106, 121, 592, 600, 609, 613  
Céntina, 425  
Centinature, 563  
Centro di proiezione, 151-53, 260  
Cerchi di gola, 226  
Cerchio  
  diametrico, 262  
  minore, 262  
  osculatore, 29, 30, 33, 102-103

- Cerniera, 351, 377, 465, 484, 531, 534-35, 540, 556, 560-61  
 Cervello, 423  
 Chasles, Michel, 123  
 Chéreau, Jean, 529  
 Chew, Paul L., 408  
 Chiarezza apparente, 591, 594-95  
 Chiaroscuro, 589-616  
 Chiave, 423  
 Chiocciola o lumaca, 235-41  
 Ciaroni, Roberto, 5  
 Cicloide, 118-122  
 Cilindro  
   quadrico, 161-68  
   rotondo, 162-68, 224  
   tabulato, 22  
 Cilindroide, 10, 156-57  
 Cissoide, 121  
 Clairaut, A.C., 97  
 Clairaut, Alexis Claude, 488  
 Clark, J., 78, 87  
 Clark, W., 414  
 Clelia, 129-32  
 Clotoide, 125-26  
 Codice di Schläfli, 302  
 Cohn-Vossen, S., 171  
 Colonna torsa, 235-41  
 Conchiglia del Nautilus, 241, 243  
 Conci, 423  
 Concoide, 121  
 Coni di Menecmo, 286  
 Conica, 19, 162  
 Cono  
   a cuneo, 158-59  
   asintotico, 171, 255  
   direttore, 230  
   quadrico, 161-68  
   rotondo, 162-68, 224  
 Conoide, 156-58, 379-80  
 Continuità, 15, 31-33, 51, 53, 66, 79, 87, 103, 147-48  
   delle curvaturei, 15, 31  
   delle tangenti, 15  
   posizionale, 15, 32-33  
 Contorno  
   apparente, 152-53  
   visibile, 8  
 Convex hull, 15, 18, 21  
 Coock, Robert L., 606-607  
 Coons, S., 22  
 Corda, 423  
 Cornice d'imposta, 425  
 Cornu, Marie-Alfred, 125-26  
 Criterio di Delaunay, 406  
 Cupola, 428, 447  
   composta, 428, 459-61  
   geodetica, 299, 352-78  
 Curabelle, Jacques, 485  
 Curva  
   di Bézier, 13-17, 19, 89  
   di Viviani, 129, 132-34  
   estrusa, 22  
   spina dorsale, 22  
 Curvatura, 29-33, 42, 49, 78, 83, 102-104, 106-112, 148-51, 161  
 Curvatura gaussiana, 34-35, 49-50, 144, 148-51, 161  
 Curve  
   a poli, 13-19, 25  
   parametriche, 12-13  
 Dandelin, Pierre Germinal, 264, 266  
 Debevec, Paul, 615  
 De Carlo, Laura, 97  
 Delaunay, Boris N., 406-11, 415-22  
 Delorme, Philibert, 524-29, 547-55  
 Deltoide, 121  
 Derand, François, 529-30, 534-35, 546, 553  
 De Santis, Anna, 462  
 Desargues, Girard, 485, 487, 524, 529-31, 538-40, 542, 546-47, 555-61  
 Diametri coniugati, 287  
 Diedro, 184, 263-64, 463  
 Dilatazione, 167, 171, 173, 249-50, 253-58, 387  
 Direttrice, 144, 155-60  
 Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 406  
 Discretizzazione, 347-401  
 Division, 362-63  
 Docci, Mario, 140, 187  
 Dodecaedro, 301-26, 333, 340, 364-65, 368-71, 374, 376, 389-402  
 Doubling, 361-77  
 Dragomir, Virgil, 299, 324, 332, 365  
 Dualità, 102-108, 218, 305, 325-27, 395, 410  
 Effetti della luce sui corpi, 591-93  
 Elica, 19, 30, 122-23, 129-43  
   cilindrica, 135  
   conica, 135  
   sferica, 132, 134-35  
 Elicoide, 229-41  
   aperto, 230  
   chiuso, 230  
   conico, 235-41  
   obliquo, 230  
   retto, 230  
   rigato, 230  
   svilupicabile, 161, 234-35, 216  
 Ellisse, 113-17, 264  
   di gola, 170  
 Ellissoide, 34, 245, 248-52  
   rotondo, 224, 248-50  
 Emmer, Michele, 339, 359, 388, 395  
 Enti geometrici, 97  
 Epicicloide, 120-21

- Equatori, 226  
 Equazioni di Maxwell, 600  
 Equidistanza, 416  
 Errore  
   analitico, 26  
   di calcolo, 26  
   di troncamento, 26, 28  
 Esaedro, 301-306, 309-10, 392-94  
 Esagono semplice  
 Escher, Maurits Cornelis, 400  
 Estradosso, 423  
 Euclide, 308-11, 388, 395, 487  
 Eulero (Leonhard Euler), 126, 299-302, 400  
 Evoluta, 103-106, 110-12  
 Evolvente, 103-106, 110-12  
  
 Faceting, 377  
 Falda, 462  
   ad angolo di pendio costante, 463-64  
   ascendente, 231  
   discendente, 231  
 Fallavollita, Federico, 144, 423, 510  
 Fantini, Filippo, 60, 81  
 Fano, G., 205, 489, 496, 510, 594-96  
 Farouki, R.T., 414  
 Fasci  
   proiettivi, 187-95  
   prospettivi, 191  
 Fascio  
   di piani, 147-48, 171, 176, 183, 185-90, 200, 207, 211  
   di rette, 108, 495  
 Fenomeno di Runge, 24  
 Fermat, Pierre (de Fermat), 487  
 Fiedler, G., 198, 201-202  
 Field, David A., 416  
 Filo di ferro, 5-6, 8, 74  
  
 Filari, 423  
 Flessione, 108-109  
 Folding, 377-78  
 Folinea, R., 466, 482  
 Forme  
   primarie, 49-50  
   secondarie, 49-50  
 Freccia, 423  
 Free-form, 384-88, 417  
 Frézier, Amédé François, 282, 488, 516, 524-25, 536-37, 543, 545-47  
 Fronti, 423  
 Fuller, Buckminster, 356-58  
 Funzioni di miscelamento, 13, 15-17, 21  
 Fuoco, 106, 113-17, 269, 283  
  
 Galileo Galilei, 118  
 Gario, Paola, 389  
 Generatrice, 144, 154-256, 190, 224  
 Geodetica, 127, 271  
   del cilindro, 136  
 Geometria proiettiva, 97  
 George, Paul Louis, 409  
 Gheorghiu, Adrian, 299, 324, 332, 365  
 Giacitura, 155-61, 165-67, 177, 182, 198, 211, 235, 248, 252, 256-61, 283-94  
 Gilbert, Nicolas (Gabriel Marie), 485  
 Goral, Cindy M., 609-11  
 Gouraud, Henry, 604-605  
 Grado di intensità luminosa, 592-94  
 Greenberg, Donald P., 609-11  
 Grice, Kurt R., 413  
 Guarini, Guarino, 543-44  
 Gumbert, Clyde, 411  
 Gunther, S., 399  
  
 Hachette, J.P.N., 155, 205, 290, 514  
 Haeckel, Ernst Heinrich, 360  
 Halley, Edmond, 286  
 Hassan, Oubay, 408  
 Hecht, F., 409  
 Hilbert, D., 171  
 Hoffman, D., 339  
  
 Ibrido, 11  
 Icosaedro, 72, 84, 301-306, 309-10, 313-26, 345-50, 356, 359-60, 362-74, 392-93, 397-401  
 Inchbald, Guy, 334  
 Intensità luminosa, 591-97, 600, 603-16  
 Intersezione, 20, 26-27, 64, 97, 190, 171, 174, 185, 190-91, 194, 197, 211, 232  
 Intersezioni piane tra superfici quadriche, 280-95  
 Intervallo, 8-9, 20, 45  
 Intradosso, 423  
 Intransitività, 27, 42  
 Inviluppo, 102, 107  
 Iones, A., 614  
 Iperbole, 113-17, 265  
 Iperboloide, 159-60, 380  
   a due falde, 145-47, 224, 245, 253-56, 261-63  
   a una falda, 147, 168-75, 186, 201-203  
   ellittico, 161, 169-75, 186  
   rotondo, 170-73, 224, 253  
 Ipicicloide, 120-21  
 Isomorfismo, 62  
  
 Jamitzer, Wenzel, 399  
 Jensen, Henrik Wann, 608-609, 613, 615  
 Jones, N.L., 416  
 Jousse, Mathurin, 529-30, 532-33

- Kajiya, James T., 611-12  
 Kelvin, Lord, 337-40, 356  
 Kempe, Alfred, 100  
 Kepler, Johannes, 395-400  
 Kronin, G., 614
- La Hire, Philippe de, 526, 543, 545-47, 555  
 Lagrange, Joseph - Louis, 547  
 Lambert, Johann Heinrich, 152  
 Lato  
   collassato, 10-11  
   degenerato, 10-11  
 Lau, T.S., 415  
 Lawson, Charles, 406  
 Legge  
   di Fresnel, 600  
   di Lambert, 152, 594, 600, 603-605, 608  
   di Plücker, 197  
   di Snell, 600  
 Leibniz, Gottfried Wilhelm von, 103, 119  
 Leonardo da Vinci, 395-96, 596-98  
 Leroy, C.F.A., 562, 565, 577  
 Letti, 423  
 Linea  
   asintotica, 151  
   di chiave, 423  
   di colmo, 463  
   di compluvio, 463  
   di curvatura, 151, 491  
   di displuvio, 463  
   di gola, 579, 582  
   di gronda, 462  
   d'imposta, 423  
   di stringimento, 212  
   gobba, 106-112  
   isofota, 151-53  
   luogo geometrico piana, 113  
   luogo geometrico sghemba, 113  
   sghemba, 106-112
- Lista, 25  
 Lo, S.H., 411, 413, 415  
 Lobel, Alain, 351-52  
 Lohner, Rainald, 411  
 Loria, Gino, 97, 228, 238, 308, 488  
 Lossodromia, 112, 127, 129-43  
 Luogo geometrico, 97-102, 113-22, 144
- Maertterer, Jess, 136-37  
 Maglie triangolari sferiche, 365  
 Manifold, 39  
 Marcolli, Attilio, 357  
 Marcum, D.L., 408  
 Media pesata, 13, 16-17  
 Mercatore, Gerardo, 10, 130  
 Mesh, 22, 60-76, 79, 81, 83, 87, 91, 401-22  
 Metodo della sfera vuota, 406  
 Meyer, Richard, 489  
 Micro-bevel, 61  
 Migliari, Riccardo, 140, 144, 187, 272, 284, 306-307, 359, 423, 589  
 Milliet de Chales, Claude François, 543  
 Min, Weidong, 414  
 Mitchell, Scott, 413  
 Modellazione, 41-59, 60-69, 72, 75-76, 78, 83-87, 91-93  
   a superfici, 6-8, 43, 52, 55, 58  
   complessa, 42  
   poligonale, 60, 66-71, 87, 89  
   semplice, 42  
   solida, 7-8, 52, 55, 58, 64  
 Monge, Gaspard, 103, 111, 113, 154, 176, 485, 488, 491  
 Muraro, Michelangelo, 398  
 Muratura  
   a piombo, 491  
   a scarpa, 491  
 Muro a piombo, 491  
 Muthukrishnan, S.N., 416
- Nastro di Moebius, 74  
 Nayar, Shree K., 607-608  
 Newell, Martin E., 611  
 Newton, Isaac, 119  
 Normale, 20, 25, 33-36, 39, 46, 63, 72, 74, 94, 100-104, 108, 214  
 Nunes, Pedro, 130  
 NURBS, 15, 17-19, 21-22, 25, 48, 50-51, 60-66, 69, 77-78, 87, 91, 99-100, 130, 132, 136, 138, 141, 254, 282, 289, 324, 340, 384-88, 417-22, 497
- Olivier, Théodore, 286-87  
 Ombra  
   autoportata, 591-96, 98  
   portata, 591-96  
   propria, 152, 591-96  
 Omografia, 194  
 Omologia  
   piana, 261  
   solida, 260-63  
 Omotetia, 240-41, 581  
 Operazione di proiezione  
 Operazioni booleane, 7, 11, 42, 64-65, 79, 91  
 Orditura, 564, 575, 578-81  
 Oren, Michael, 607  
 Orizzontale (retta, piano)  
 Orme, Philibert de l', 486, 499  
 Ortogonalità (vedi perpendicolarità)  
 Ottaedro, 301-302, 310-17, 321, 324, 340, 347-50, 356, 363-64, 393  
 Owen, Steven J., 404-405, 414
- Pacioli, Luca, 395-96, 399  
 Paolo Uccello, 398-99  
 Pappo, 487  
 Parabola, 113-17, 265  
 Parabole principali, 180-81

- Paraboloide, 159-60, 245  
   delle normali, 211  
   ellittico, 256-59  
   iperbolico, 159-61, 171, 175-85, 380  
   rotondo, 224  
 Parallelepipedo costruttore, 169  
 Parametrizzazione, 8, 15, 18-19  
 Parikh, Paresh, 411  
 Paris, Leonardo, 562  
 Pascal, Blaise, 118, 487  
 Patch, 69, 76-77  
 Pedale, *vedi* podaria  
 Pendenza, 462  
 Penombra, 590-93  
 Peri, Giuseppe, 562, 596-97  
 Pérouse de Montclos, J.-M., 523  
 Pesce, Gaetano, 87  
 Petri, A., 574  
 Pezze di Bézier, 15-16, 21, 77  
 Phelan, Robert, 339-41  
 Phillips, R.K., 416  
 Phong, Bui Tuong, 402, 604-605, 607  
 Piano  
   asintoto, 208  
   bisettore, 264  
   centrale, 211  
   di collineazione, 260-61  
   di costruzione, 249, 254  
   di giacitura, 5, 25  
   di imposta, 423, 462  
   di lavoro, 472  
   di proiezione, 97  
   diametrico, 198  
   direttore, 155, 176, 208  
   frontale, 501  
   limite, 260-61  
   meridiano, 225-27  
   osculatore, 30, 107-10, 214-16  
   polare, 197  
   rigato e punteggiato  
   tangente, 147-48, 161  
 Piattabanda, 514  
 Piede, 119, 228  
 Piegatura, 377  
 Piero della Francesca, 395  
 Pillet, Jules, 562-63, 565-67, 585-87  
 Pitagora, 389  
 Pitot, Henri, 127  
 Pixel, 41, 83-84, 402, 599, 610  
 Plateau, Joseph Ferdinand, 339  
 Platone, 389-95  
 Podaria, 103-106, 121  
 Pohlke, Karl, 306-308, 365  
 Poinsot, Louis, 397-400  
 Point cloud, 60, 403  
 Polare, 99, 122-33, 195-99, 246-48  
 Poliedri catalani, 311, 325-27  
 Poliedro, 21, 63, 72, 74-75, 299-422  
   di Goldberg, 340  
 Poligonale, 63-64  
 Poligono, 63, 65-68, 70-72, 74-76, 78-81, 87, 89, 91-93  
   dei poli, 15, 18  
 Polinomi di Bernstein, 13, 16, 21  
 Polo, 13-18, 21, 25, 293  
 Polyhedrated-surface, 377  
 Poncelet, J.V., 293  
 Posizione generica, 503, 564  
 Poudra, Noel Germain, 555-58  
 Prisma, 42, 564-69  
 Prismi ortogonali regolari, 315  
 Problema  
   di Apollonio, 262, 272-78  
   di Plateau, 339, 345-48  
 Proclo, 389  
 Prodan, Alessandro, 614  
 Prodotto tensoriale, 21  
 Profilo  
   moresco o lobato, 436  
   ovale, 432-36  
   ovale a cinque centri, 434  
   ovale a tre centri a rapporto fisso, 434  
   ovale a tre centri isometrico, 433  
   ovale a tre centri ottimizzato, 433  
   ovale a tre centri, 433  
   saraceno, 436  
 Proiettante (ente geometrico), 130-35, 152, 201-203, 261  
 Proiezione, 83  
   cilindrica, 83  
   cubica, 83  
   planare, 83  
   sferica, 83  
   stereografica, 201-202, 269-73, 293-95  
 Prospettiva, 440, 530, 556, 562, 590-91  
   aerea, 591, 596-98  
 Punti ellittici, parabolici, iperbolici, 151, 227-28, 245-46  
 Punto  
   all'infinito, 102  
   brillante, 591, 595-97, 602-603, 605  
   di contatto, 102, 147-48  
   di controllo, 13, 15, 18, 23, 52  
   improprio, 182  
   iperbolico, 34  
 Pyramidation, 364-65, 370-77  
 Quadrilatero sghembo, 176  
 Quetelet, A.D., 264, 266, 307  
 Quota  
   della frontiera, *vedi* B-rep  
   della superficie, 8-11  
   stereografica, 201-203  
 Rasterizzazione, 402  
 Rebay, S., 408

- Reitz, K. P., 606  
 Relazioni di adiacenza, 39  
 Rendering, 61-62, 69, 74, 79, 83, 94, 597, 601, 609  
 Reni, 423  
 Retta  
 all'infinito, 182  
 di de La Hire, 121  
 di massima pendenza, 466, 472-73, 478-83  
 di minima distanza, 211  
 di Pascal, 431  
 impropria, 102  
 intersezione, 147-48, 155-56, 179, 185, 190, 195, 200-201, 219  
 punteggiata, 191  
 Ribaltamento, 74, 416, 467, 469, 474-76, 481-84, 526, 531-535, 560  
 Ridolfi, Mario, 481  
 Riflesso, 591, 594-98, 600-16  
 Rinfiacco, 423  
 Roberts, L. G., 599  
 Romney, G.W., 604  
 Runge, Carl, 24  
 Ruppert, Jim, 408
- Saarinen, Eero, 87  
 Saddle-polyhedra, 344-49  
 Saffaro, Lucio, 395-96, 398-99, 401, 403  
 Saigal, Sunil, 414  
 Saltel, E., 409  
 Salvatore, Marta, 97, 144, 485  
 Scala  
 elicoidale, 521-23  
 Schlafli, Ludwig, 301-302, 399  
 Schoen, Alan H., 342, 347  
 Schwarz, Hermann Amandus, 306-307, 347-50, 365  
 Scolari, M., 527
- Scorcio, 84  
 Scuplting, 93  
 Sella di scimmia, 145-46, 282  
 Serie rigata, 186  
 Serpentino, 235-41  
 Sesto acuto, 425, 436-40, 459  
 Sesto, 423  
 Severi, F., 482  
 Sezione  
 aurea, 308  
 principale, 262  
 retta, 127-28, 232-33, 284, 287-90, 502-505, 520  
 Sezioni  
 circolari, 285-87  
 piane del cilindro, 290  
 piane del cono, 283-85  
 Sfera, 10, 49, 69, 262-78  
 Shephard, Mark S., 405, 413  
 Sistema polare, 197  
 Solid modeling, 7, 59  
 Solidi  
 archimedei, 311-27, 355  
 catalani, *vedi* poliedri catalani  
 platonici, 72  
 Soprassetto, 425  
 Spalle, 423  
 Sparrow, E.M., 606-608  
 Spazio uv, 10  
 Speroni, 423  
 Spigolo, 61, 66, 71, 76, 78  
 di regresso, 106-107, 160-61, 213-14  
 Spira, 229  
 Spirale, 129-43  
 conica, 135  
 di Archimede, 122-29, 232  
 di Cornu, 125-26  
 di Fermat, 123  
 di Poincot, 131  
 iperbolica, 123-24  
 logaritmica, 124
- piana, 122-23  
 sferica (clelia), 129, 132-33  
 sghemba, 126-27  
 Spline, 25, 89, 91-92  
 Staten, Matthew L., 416  
 Stereotomia  
 del legno, 562-88  
 della pietra, 485-61  
 Stripes, 377  
 Strumenti diagnostici, 34-37  
 Struttura  
 a sesto acuto, 425  
 a sesto incompleto, 425  
 a tutto sesto, 425  
 obliqua, 425  
 rampante, 425  
 retta, 425  
 rialzata, 425  
 ribassata (o scema), 425  
 zoppa (a collo d'oca), 425  
 Superficie  
 algebrica, 145  
 analitica, 22  
 a pendenza uniforme, 235, 241-45  
 a poli, 20-22, 48  
 a suddivisione infinita, 22  
 canale, 22  
 cubica, 278, 282  
 di Bézier, 21-24, 51  
 di Coons, 22  
 di interpolazione, 145, 278-80  
 di paramento, 491-97  
 di rivoluzione, 22, 144, 224-29  
 di suddivisione, 60  
 elicoidale, 144  
 free-form, 384-88  
 implicita, 22  
 offset, 22, 46  
 parametrica, 20, 51, 60  
 procedurale, 22

- quadrica non rigata, 245-78  
 rigata, 22, 49, 144, 153-224  
 rigata quadrica, 145, 185-201  
 ritagliata, 10  
 sviluppabile, 160-61, 208, 213-220  
 transfinita, 22  
 trascendente, 145  
 Surface modeling, 6  
 Surface triangulation, 402  
 Sutherland, Ivan, 598  
  
 Tangente (retta, piano), 29-33, 35, 42, 100-106, 150-51, 214  
 Tassellazione, 60, 327-41, 347, 350-56, 365, 385-87, 401, 407-10, 417, 419, 599  
 Tautges, Tim J., 413  
 Taylor, Jean, 339  
 Teorema  
   delle coniche di Apollonio di Perga, 97  
   di Catalan, 232  
   di Chasles, 203-205, 211  
   di Dandelin, 264-69, 274, 307  
   di Dupin, 33  
   di Monge, 159-62, 176, 245, 255, 258, 286, 290-91  
   di Montucla-Guillery, 127  
   di Olivier, 127  
   di Pohlke, 306-308, 365  
   di Villarceau, 228-29  
   di Weierstrass, 24-25  
 Tessari, D., 593  
 Tetraedro, 198-99, 327-32, 339, 344-45, 350, 356, 359, 362-63, 377, 392, 395, 406, 413  
   polare, 198-99  
 Tetto  
   a capanna, 465-66  
   a capanna con teste di padiglione, 468  
   a gronde inclinate, 476-81  
   a padiglione, 466-67  
 Thiessen, A.H., 406  
 Thompson, D'Arcy Wentworth, 237  
 Tolleranza, 26-28, 65  
   angolare, 28  
   lineare, 28  
 Topologia, 11, 37-39, 51, 63, 78-79, 91  
 Toro, 10-12, 49, 69, 224-29  
 Toroide, 10  
 Torrance, K.E., 606-11  
 Torsione, 29-32, 108-109  
 Tramontini, Giuseppe, 111  
 Transitività, 26  
 Traslazione, 18, 21, 59  
 Trevisan, Camillo, 485, 529  
 Triangolo  
   per l'asse, 285  
   polare, 198  
 Triedro, 97, 108  
   polare, 198  
   principale, 108-109  
 Trim, 46, 77, 91  
 Trimmed, *vedi* superficie ritagliata  
 Trocoide, 118  
 Trompe, 487, 516-54  
 Trowbridge, T. S., 606  
 Tuchinsky, Philip, 414  
 Turner, M.J., 403  
 Twinning, 363-69  
  
 Unbiased, biased, 601-602  
 Unione  
   a coda di rondine, 570-71  
   a innesto orizzontale, 572-73  
   a innesto verticale, 571-72  
   a mezzo legno, 567-70  
   a mortasa, 564-67  
   a tenone, 564-67  
  
 Valenti, Graziano Mario, 589  
 Van der Rohe, Mies, 614  
 Van Roomen, Adriaan, 273  
 Vandelvira, Alonso de, 486  
 Vera forma, 465, 473, 483  
 Villarceau, Yvon, 228-29  
 Vite  
   a filetto rettangolare, 156-58, 234  
   a filetto triangolare, 155-56, 232-33  
   di Saint Gilles, 235-41, 444-47  
 Viviani, Vincenzo, 133-34  
 Volta  
   a botte a tutto sesto, 440-41  
   a botte con testa di padiglione, 428  
   a botte lunettata, 428, 447-51  
   a botte retta, 440-41  
   a crociera, 428, 451-59  
   anulare, 428, 444  
   a padiglione, 428, 451-59  
   a schifo, 428, 459  
   a schifo con padiglione, 428, 459  
   a vela, 428, 441-44  
   boema, 444  
   cilindrica (a botte), 425  
   cilindrica obliqua, 502-12  
   cilindrica retta, 501-502  
   cilindrica strombata, 512-16  
   cilindrica (a sbieco), 425  
   composta, 425  
   conica, 428, 516-21  
   conoide, 157  
   conoidica, 428  
   di rivoluzione o cupola, 428  
   elicoidale, 428  
   quadrabile fiorentina, 134  
   semplice, 425  
   sferica, 497-501  
 Voronoi, Georgy, 406-10

Wallis, Charles Glenn, 395  
Warnock, J.E., 603  
Watkins, G.S., 604  
Watson, Dave, 406

Wearie, Denis, 339-41  
Weatherill, Nigel P., 408  
Whitted, Turner, 609-13  
Wireframe, 5, 598-99

Wittchen, S.L., 413  
Yerry, M.A., 405, 413  
Zhukov, S., 614

## References

1. BREYMAN, Gustav Adolf. *Trattato generale di costruzioni civili*. Milano. 1885.
2. DOCCI, Mario and MIGLIARI, Riccardo. *Scienza della rappresentazione*. Fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva. Carocci Editore. 1992. ISBN-13: 9788843004140
3. FALLAVOLLITA, Federico. Le superfici rigate: una rilettura del *Traité de géométrie descriptive* di Hachette. In DE CARLO, Laura (a cura di). *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*. Vol. 1 - nuova serie. Roma: Gangemi, 2007, pp. 111-122. ISBN 978-88-492-1323-2.
4. FALLAVOLLITA, Federico. *Le superfici rigate e le superfici sviluppabili. Una rilettura attraverso il laboratorio virtuale*. Tesi di Dottorato di Scienza della Rappresentazione e del Rilievo dell'Architettura. Sapienza Università di Roma: Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, 2008.
5. FIEDLER, William. *Trattato di geometria descrittiva*, a cura di Antonio Sayno ed Ernesto Padova, Firenze. 1874.
6. GHEORGHIU, A. and DRAGOMIR, V. *Geometry of structural Forms*. Applied Science Publisher LTD, Bucarest. 1978.
7. HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Traité de géométrie descriptive*. Paris: Corby, 1822, pp.283-286.
8. HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Rapport fait à la classe des Sciences Physique et Mathématiques de l'Institut [...]*. In *Correspondance sur l' École Royale Polytechnique, à l'usage des élèves de cette École, volume III*. Paris: Imprimerie de M.me V. Courcier, 1816, pp. 234-237.
9. HILBERT, David. *Geometria intuitiva*. Boringhieri, Torino. 1972.
10. KLINE, Morris. 1991. *Storia del pensiero matematico, dall'antichità al settecento, volume I*. Torino: Einaudi.
11. LORIA, Gino. *Storia della geometria descrittiva dalle origini ai giorni nostri*. Milano: Hoepli, 1921.
12. MIGLIARI, Riccardo. *Geometria dei modelli*. Kappa edizioni, Roma. 2003.
13. MIGLIARI, Riccardo. *Rappresentazione come sperimentazione*. In Ikhnos, *Analisi grafica e storica della rappresentazione*. Lombardi, Siracusa. 2008.