

Le superfici rigate: una rilettura del *Traité de Géométrie Descriptive* di Hachette

Federico Fallavollita

Abstract

Questo studio ha lo scopo di illustrare alcuni aspetti delle superfici rigate, prendendo come riferimento il trattato di geometria descrittiva di Jean Nicolas Pierre Hachette del 1828. La ricerca è una rilettura di alcuni paragrafi del *Traité de géométrie descriptive* attraverso il modellatore informatico ed è illustrata attraverso degli esempi, che ho chiamato esercizi, tratti dall'opera in questione.

L'obiettivo è la rappresentazione e l'ottimizzazione del problema del disegno delle rigate attraverso i modellatori informatici. Gli esercizi della ricerca contengono due aspetti: una ricognizione storica del problema dal punto di vista della geometria solida e descrittiva; una rilettura delle proposizioni del trattato attraverso il laboratorio virtuale.

Il laboratorio virtuale è quella bottega digitale, di carattere sperimentale, dove è possibile controllare direttamente nello spazio tridimensionale i problemi di morfogenesi della forma che interessano l'architettura. Di volta in volta vengono descritte le operazioni svolte con il modellatore e i problemi trovati. Contemporaneamente vengono brevemente introdotti i concetti sulla modellazione informatica Nurbs che sono indispensabili per capire i punti critici.

Il computer, al di là dei problemi riscontrati nella modellazione, si è rilevato uno strumento indispensabile per la visualizzazione di alcune proprietà delle rigate. Diverse considerazioni, infatti, vengono solamente enunciate ma non vengono rappresentate da Hachette. La ragione è da imputare alla complessità dei disegni che si sarebbero dovuti eseguire con il solo strumento della geometria descrittiva. Hachette, come Monge prima di lui, era un matematico. Per cui molte delle considerazioni sulle rigate sono il frutto di studi analitici. La rappresentazione, quando è affatto macchinosa, viene lasciata all'immaginazione del lettore.

Lo scopo della ricerca è quindi anche quello di rendere visibile ciò che è solo enunciato a parole su basi analitiche.

E' interessante quanto afferma Hachette in proposito: «La geometria descrittiva così come la consideriamo in questo libro, contiene due parti, l'una razionale (*rationnelle*), e l'altra tecnica (*technique*). La prima parte, puramente teorica, si riaggancia a una branca della matematica, che abbraccia tutte le proprietà delle figure estese, e che i più grandi geometri hanno trattato o con l'analisi o con la sintesi. La parte tecnica della geometria descrittiva è l'arte di rappresentare su dei fogli da disegno, i punti le linee dello spazio; ha per base il metodo delle proiezioni; la pratica di questo metodo esige un colpo d'occhio sicuro, una mano esercitata che sappia impiegare con abilità la riga, il compasso e la squadra».

Questo duplice aspetto è assolutamente calzante anche per quanto riguarda l'uso del computer. La qualità e la correttezza del disegno meccanico dipendono, come prima cosa, dalla conoscenza della geometria e, successivamente, dall'abilità con cui il disegnatore fa uso del modellatore. Le possibilità nonché i limiti del modellatore sono aspetti fondamentali, che devono far parte del bagaglio delle esperienze del progettista che intende far uso della modellazione. Ciò significa avere «una mano esercitata», in altre parole, disporre di una piena consapevolezza nell'utilizzo del disegno tridimensionale. L'esempio finale è un problema di stereotomia molto utile per capire le attuali procedure informatiche di generazione e costruzione della forma; l'oggetto è una particolare volta chiamata *arrière-voûture de Marseille*.

Strumenti
del Dottorato di Ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo
SAPIENZA Università di Roma – Dipartimento di Rilievo, Analisi, Disegno dell'Ambiente e dell'Architettura

Informatica *e* fondamenti scientifici della rappresentazione

a cura di *Laura De Carlo*

GANGEMI  EDITORE



Strumenti del Dottorato di Ricerca
in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo

collana diretta da *Riccardo Migliari*

Nuova serie – volume 1°

ha collaborato alla cura del volume
Italia Vinciguerra

©
Proprietà letteraria riservata
Gangemi Editore spa
Piazza San Pantaleo 4, Roma
www.gangemieditore.it

Nessuna parte di questa
pubblicazione può essere
memorizzata, fotocopiata o
comunque riprodotta senza
le dovute autorizzazioni.

ISBN 978-88-492-1323-2

Sapienza Università di Roma

Dipartimento di Rilievo, Analisi e Disegno dell'Ambiente e dell'Architettura

Dottorato in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo

Informatica *e* fondamenti scientifici della rappresentazione

a cura di *Laura De Carlo*

Seminario/laboratorio

Roma 12-14 febbraio 2007

Indice

Presentazione <i>Mario Docci</i>	7
Introduzione <i>Laura de Carlo</i>	9

PARTE PRIMA

Contributi

• Per una geometria descrittiva attuale (relazione introduttiva) <i>Riccardo Migliari</i>	27
• La geometria della rappresentazione nei programmi CAD <i>Stefano Cinti Luciani</i>	41
• L'idea di spazio da Escher all'Architettura virtuale <i>Michele Emmer</i>	47
• La rappresentazione nella Realtà Virtuale <i>Daniele Marini</i>	55
• Informatica e rappresentazione dell'architettura: riflessioni <i>Cesare Cundari</i>	63
• Math of Aesthetics <i>Jess Maertterer</i>	65
• Calcolo geometrico, Prototipazione rapida <i>Alberto Paoluzzi, Giorgio Scorzelli</i>	73
• Informatica ed Evoluzione <i>Roberto de Rubertis</i>	83

PARTE SECONDA

Interventi dei dottorandi della scuola

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA DOTTORATO IN SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE E DEL RILIEVO	
<i>Geometria tra storia e informatica</i>	
• Il contributo del modellatore informatico nello studio di lossodromie, eliche e spirali <i>Leonardo Baglioni</i>	93
• L'Ottica di Euclide, appunti per una rilettura critica <i>Stanislao Cantono di Ceva</i>	103

Teniamo i piedi per terra, ma guardiamo il cielo <i>Gaspere De Fiore</i>	11
--	----

Le ragioni del seminario <i>Laura De Carlo</i>	15
---	----

Appunti sulla rappresentazione nel rilievo <i>Emma Mandelli</i>	19
--	----

• Le superfici rigate: una rilettura del <i>Traité de géométrie descriptive</i> di Hachette <i>Federico Fallavollita</i>	111
• La perpendicolarità nello spazio <i>Alessandra Rocco</i>	123
• La misura nella costruzione prospettica <i>Italia Vinciguerra</i>	129
• L'orizzonte e la prospettiva <i>Alessandra Nizzi</i>	141

UNIVERSITÀ DI FIRENZE DOTTORATO IN RILIEVO E RAPPRESENTAZIONE DELL'ARCHITETTURA E DELL'AMBIENTE

<i>Point cloud: tecniche di modellazione a confronto</i>	
• Il disegno e la conoscenza <i>Angela Culcasi, Massimo Gasperini</i>	151
• <i>Shape from points</i> . Modellazione matematica, morfogenesi e controllo geometrico <i>Angela Pintore, Marta Salvatore</i>	161
• <i>Clouds and clay</i> . Superfici di suddivisione ed ottimizzazione <i>Carlo Battini, Filippo Fantini</i>	175

UNIVERSITÀ DI CHIETI-PESCARA GABRIELE D'ANNUNZIO DOTTORATO IN RAPPRESENTAZIONE DELL'ARCHITETTURA E DELL'AMBIENTE

<i>La rappresentazione digitale nel disegno di progetto</i>	
• Animazione e interazione nella rappresentazione digitale <i>Emiliano Auriemma</i>	189
• Rappresentare Michelangelo: dall'analisi dei disegni alla ricostruzione delle geometrie <i>Annalisa Frattarelli</i>	197

- Museo virtuale: il caso dell'E 42 203
Massimiliano Mazzetta
- Geometria e proporzioni nelle rappresentazioni del foro vitruviano. Modelli virtuali e analisi grafiche a compendio del trattato 213
Chiara Ridolfi

- POLITECNICO DI BARI
DOTTORATO IN RAPPRESENTAZIONE
DELL'ARCHITETTURA E DELL'AMBIENTE
Il ruolo della rappresentazione informatica nella progettazione delle volte in pietra
- Volta a botte circolare, intersecata ad angolo retto da un'altra di diametro minore, Tavola XXXVIII 223
Olinda Ferrieri Caputi
 - Volta a crociera su pianta rettangolare, Tavola XL 229
Giusy De Fronzo
 - Volta a crociera sopra un quadrilatero irregolare Tavola XL 233
Rosa Giacomobello
 - Volte a doppia crociera e a tutto sesto, Tavola XLII 237
Carla Scialpi
 - Volta conoidica, Tavola XLVI 245
Domenico Pastore
 - La modellazione digitale per la risoluzione dei problemi di geometria e stereotomia nei cantieri delle volte a stella leccesi 247
Rocco Pastore

- UNIVERSITÀ DEL MEDITERRANEO DI REGGIO CALABRIA
DOTTORATO IN RILIEVO E RAPPRESENTAZIONE
DELL'ARCHITETTURA MEDITERRANEA
Informatica e geometrie della rappresentazione
- Le abitazioni troglodite di Matmata 253
Chiara Scali
 - Rappresentazione/Emozione: un nuovo ventre 259
Domenico Tosto
 - Proiezioni prospettiche: i retro-scena. Verità e illusioni dello spazio scenico 267
Emanuela Lo Faro
 - Testimonianze sullo spazio 273
Maria Follo

PARTE TERZA
Laboratorio di modellazione e prototipazione

- Geometria e informatica*
- Il laboratorio sperimentale della geometria descrittiva 281
Riccardo Migliari
 - Dal reale al virtuale e ritorno: appunti 307
Carlo Bianchini
 - Dal reale al virtuale e ritorno: metodologie per la prototipazione 315
Alfonso Ippolito
 - Sperimentazioni sulla cupola della cappella Pazzi. Dal rilievo al modello interpretativo 325
Leonardo Baglioni, Stanislao Cantono di Ceva, Federico Fallavollita, Italia Vinciguerra

Le superfici rigate: una rilettura del *Traité de géométrie descriptive* di Hachette

Federico Fallavollita

Questo studio ha lo scopo di illustrare alcuni aspetti delle superfici rigate, prendendo come riferimento il trattato di geometria descrittiva di Jean Nicolas Pierre Hachette del 1828¹.

La ricerca è una rilettura di alcuni paragrafi del *Traité de géométrie descriptive* attraverso il modellatore informatico ed è illustrata attraverso degli esempi, che ho chiamato esercizi², tratti dall'opera in questione.

L'obiettivo è la rappresentazione e l'ottimizzazione del problema del disegno delle rigate attraverso i modellatori informatici³.

Gli esercizi della ricerca contengono due aspetti:

- una ricognizione storica del problema dal punto di vista della geometria solida e descrittiva;
- una rilettura delle proposizioni del trattato attraverso il laboratorio virtuale.

Il laboratorio virtuale è quella bottega digitale, di carattere sperimentale, dove è possibile controllare direttamente nello spazio tridimensionale i problemi di morfogenesi della forma che interessano l'architettura. Di volta in volta vengono descritte le operazioni svolte con il modellatore e i problemi trovati. Contemporaneamente vengono brevemente introdotti i concetti sulla modellazione informatica Nurbs che sono indispensabili per capire i punti critici.

Il computer, al di là dei problemi riscontrati nella modellazione, si è rilevato uno strumento indispensabile per la visualizzazione di alcune proprietà delle rigate.

Diverse considerazioni, infatti, vengono solamente enunciate ma non vengono rappresentate da Hachette. La ragione è da imputare alla complessità dei disegni che si sarebbero dovuti eseguire con il solo strumento della geometria descrittiva.

Hachette, come Monge prima di lui, era un matematico. Per cui molte delle considerazioni sulle rigate sono il frutto di studi analitici. La rappresentazione, quando è affatto macchinosa, viene lasciata all'immaginazione del lettore.

Lo scopo della ricerca è quindi anche quello di rendere visibile ciò che è solo enunciato a parole su basi analitiche.

È interessante quanto afferma Hachette in propo-

sito: «[...] *La geometria descrittiva così come la consideriamo in questo libro, contiene due parti, l'una razionale (rationnelle), e l'altra tecnica (technique).*

La prima parte, puramente teorica, si riaggancia a una branca della matematica, che abbraccia tutte le proprietà delle figure estese, e che i più grandi geometri hanno trattato o con l'analisi o con la sintesi.

La parte tecnica della geometria descrittiva è l'arte di rappresentare su dei fogli da disegno, i punti le linee dello spazio; ha per base il metodo delle proiezioni; la pratica di questo metodo esige un colpo d'occhio sicuro, una mano esercitata che sappia impiegare con abilità la riga, il compasso e la squadra»⁴.

Questo duplice aspetto è assolutamente calzante anche per quanto riguarda l'uso del computer. La qualità e la correttezza del disegno meccanico dipendono, come prima cosa, dalla conoscenza della geometria e, successivamente, dall'abilità con cui il disegnatore fu uso del modellatore. Le possibilità nonché i limiti del modellatore sono aspetti fondamentali, che devono far parte del bagaglio delle esperienze del progettista che intende far uso della modellazione. Ciò significa avere "una mano esercitata", in altre parole, disporre di una piena consapevolezza nell'utilizzo del disegno tridimensionale.

Le superfici rigate nel trattato e nel modellatore

Nella parte dedicata alle costruzioni dei piani tangenti, Hachette affronta il tema delle rigate dando innanzitutto alcune definizioni. Egli distingue, prima di tutto, le superfici generate da una retta in due tipi: quelle che chiama superfici sviluppabili; e le altre che chiama superfici sghembe, non sviluppabili, che nomina superfici rigate. In entrambe, è possibile applicare lo spigolo di una riga su ogni retta della superficie⁵.

Hachette definisce, quindi, superficie rigata, qualsiasi superficie generata da una retta mobile, quale che sia la legge del movimento di questa retta, purché le due rette consecutive, che comprendono un elemento della superficie, non s'incontrino⁶.

1/ L'analisi della curvatura gaussiana di una superficie rigata è sempre non positiva ($K \leq 0$), cioè minore o uguale a zero; le superfici sviluppabili, invece, hanno sempre curvatura gaussiana nulla ($K=0$).

2/3/4 Costruzione della superficie rigata generica generata da una retta mobile che si appoggia su tre curve date.

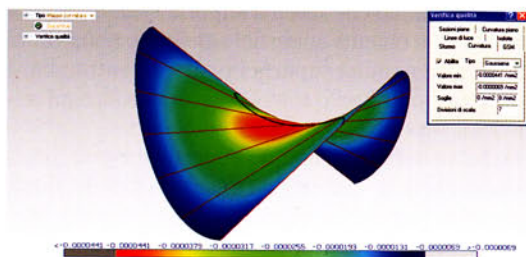
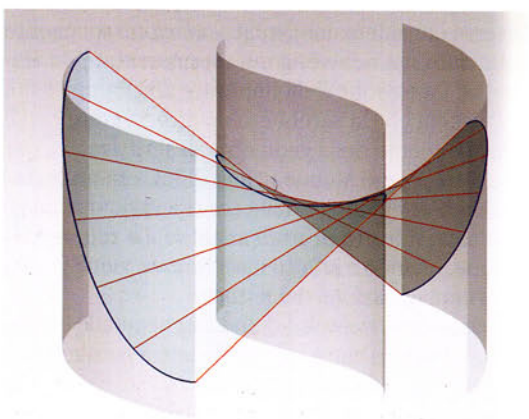
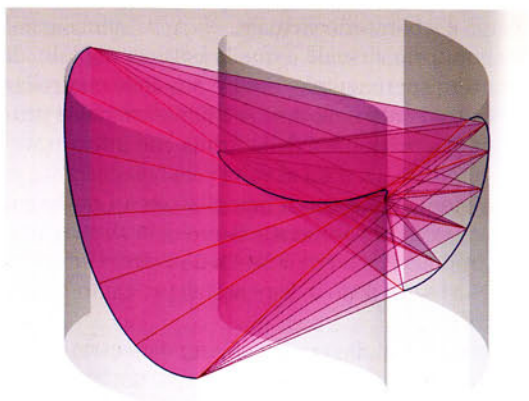
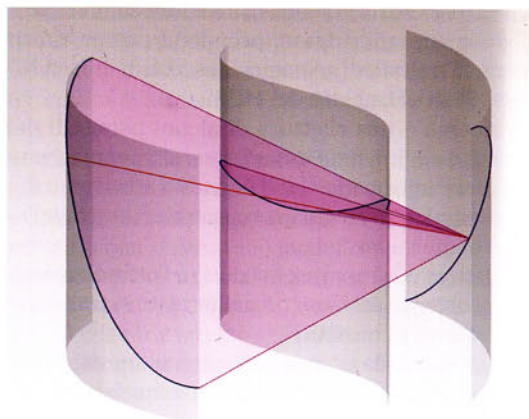
Nei modellatori NURBS le superfici vengono stabilite tramite curve dette isoparametriche (u, v). Una superficie rigata è una superficie nelle cui equazioni parametriche uno dei due parametri appare di grado uno e con un singolo arco⁷. Le curve isoparametriche relative ad uno dei due parametri (ad esempio u) sono pertanto linee rette e costituiscono le generatrici della superficie rigata.

È possibile, tuttavia, generare una rigata anche senza costruirla a partire dal movimento di una retta, basti pensare al paraboloido iperbolico⁸, nel qual caso nessuna delle due schiere di curve isoparametriche è una retta. Se ciò è vero, è anche vero che il modellatore permette una serie di verifiche attraverso vari strumenti fra i quali l'analisi gaussiana⁹ che consente di controllare la curvatura delle superfici e verificare, quindi, che la curvatura, nel caso delle rigate, sia negativa (fig. 1).

I primi due esercizi presi in considerazione prendono spunto dalle definizioni di superficie rigata generica e superficie sviluppabile generica; gli esercizi seguenti esemplificano lo studio delle proprietà caratteristiche delle rigate; l'ultimo esercizio, la modellazione della *épure Coupes des Pierres N.3*, è un'applicazione diretta alla stereotomia dei principi esposti in precedenza.

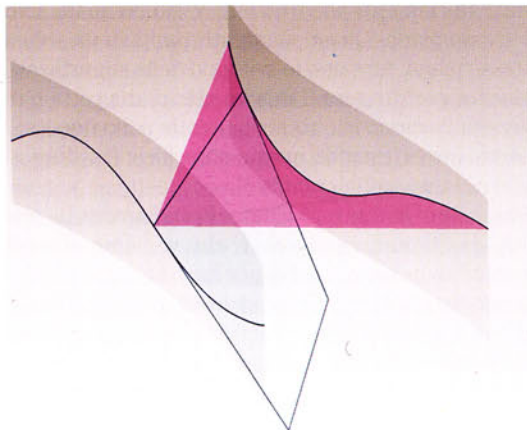
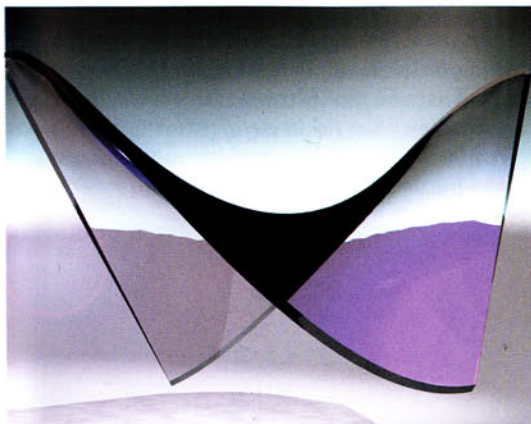
1° Esercizio: costruzione della rigata generica, date tre direttrici generiche (curve sghembe).

Si prende un punto qualsiasi sulla prima direttrice, e considerandolo come il vertice dei coni che hanno per base le altre due direttrici, le rette intersezioni dei coni appartengono alla superficie rigata

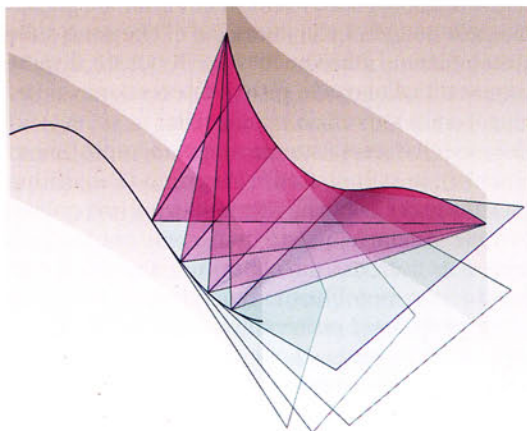


5/ La superficie rigata generica.

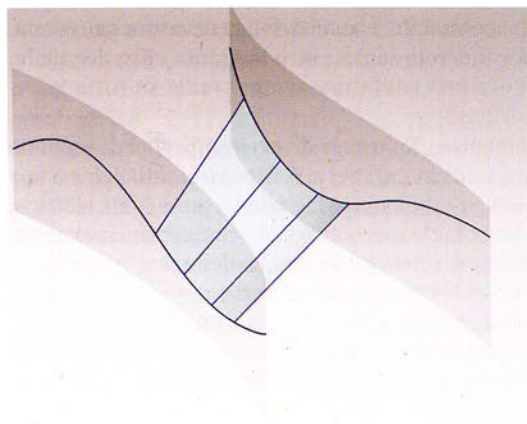
6/7/8/ *Costruzione della superficie sviluppabile generica.* «Tre curve sono necessarie per dirigere il movimento d'una retta che genera la superficie rigata generale; ma quando questa superficie è sviluppabile, due curve sono sufficienti».



(fig. 2, 3, 4, 5). Non esiste un comando per costruire una rigata per tre direttrici generiche. Una volta trovate un certo numero di generatrici, nell'esempio cinque, si disegna la rigata attraverso il comando loft, interpolando le rette generatrici. La superficie trovata, tuttavia, approssima la rigata in funzione del numero di generatrici utilizzate per costruirla; più si aumenta il numero delle generatrici, più la superficie costruita aderirà alle curve direttrici. In definitiva con questa costruzione non si avrà mai la perfetta aderenza alle tre direttrici. Attualmente, per quello che si è potuto accertare, non è possibile costruire la rigata generica date tre direttrici, ma solamente una sua approssimazione, che sarà tanto più vicina alla rigata cercata, quanto più saranno numerose le generatrici costruite. Un'ultima verifica è utile per escludere che la superficie costruita non sia a piano direttore¹⁰.



2° Esercizio: costruzione della sviluppabile generica, date due direttrici (curve sghembe)
Una superficie sviluppabile è il luogo geometrico delle tangenti a una curva a doppia curvatura, che chiamiamo spigolo di regresso della superficie; due tangenti consecutive corrispondono a due posizioni consecutive della linea retta mobile generatrice della superficie¹¹.
Due rette consecutive d'una superficie sviluppabile comprendono un elemento di questa superficie;



9/ Rappresentazione della prima proprietà di un paraboloido iperbolico: «qualsiasi superficie rigata ha per superficie normale secondo una retta, un iperboloido a una falda, o un *plan gauche* dove i parametri cambiano per ciascuna retta». Il piano di quadro è ortogonale al piano direttore.

tutti gli elementi possono essere riuniti su un solo e stesso piano. Questi elementi riuniti su un solo e stesso piano, formano lo sviluppo della superficie¹². Mentre per dirigere il movimento d'una retta che genera la superficie rigata generale sono necessarie tre curve, quando questa superficie è sviluppabile ne sono sufficienti due¹³.

Siano c e c' le due curve date. Prendiamo sulla prima (c) un punto qualsiasi P che vediamo come il vertice d'un cono che ha per base la curva c' . Essendo data la curva c , la tangente a questa curva nel punto P è determinata. Facciamo passare per questa tangente un piano tangente al cono¹⁴; la retta di contatto appartiene alla superficie sviluppabile (fig. 6, 7, 8).

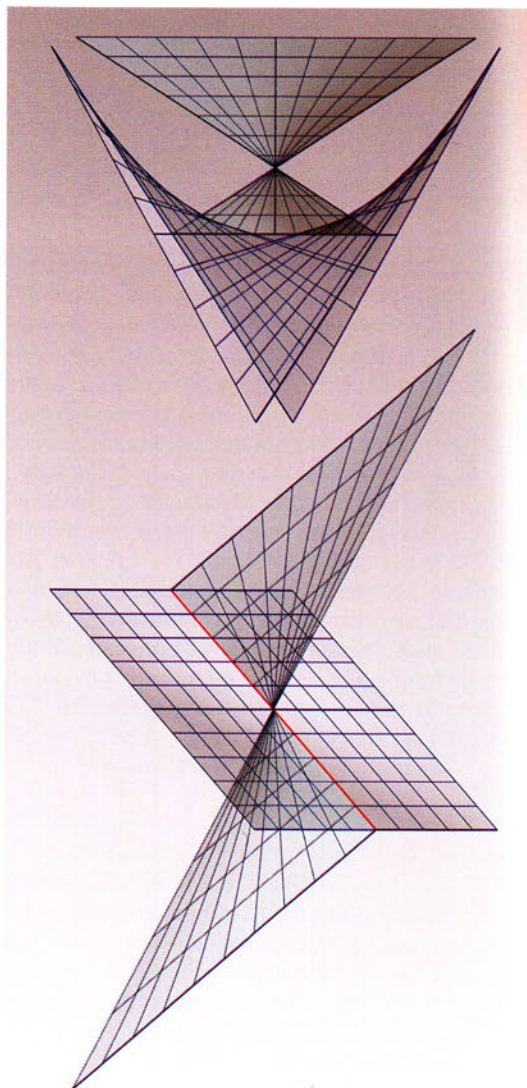
Il fine di questa costruzione è determinare le coppie delle tangenti alle curve c e c' che sono sullo stesso piano. I piani successivi di queste diverse coppie si tagliano, e le rette d'intersezione appartengono alla superficie sviluppabile.

Nel modellatore esiste un comando apposito per costruire le sviluppabili¹⁵. Purtroppo l'algoritmo costruisce dei coni che danno luogo a una polisuperficie. Anche in questo caso, come per la rigata generica, per costruire la sviluppabile generica per due curve dobbiamo modellarla generatrice per generatrice. I problemi sono i medesimi: la superficie che si ottiene per interpolazione con il comando *loft* non è esattamente quella cercata. Nonostante ciò, il risultato, nei limiti delle tolleranze consentite dal modellatore, può essere considerato accettabile. L'analisi della curvatura gaussiana, per una tolleranza entro la quinta cifra decimale, rileva una curvatura sempre nulla su tutta la superficie.

Hachette, dopo aver diviso le superfici di secondo grado in cinque specie (ellissoide, iperboloido a una falda, iperboloido a due falde, paraboloido ellittico, paraboloido iperbolico), si occupa principalmente delle proprietà geometriche delle due superfici rigate di secondo grado: l'iperboloido a una falda e il paraboloido iperbolico o *plan gauche*.

Le proprietà più importanti di queste superfici sono:
 «1. che qualsiasi superficie rigata ha per superficie normale secondo una retta, un iper-

- boloido a una falda, o un *plan gauche* dove i parametri cambiano per ciascuna retta;
 2. che qualsiasi superficie rigata ha per superficie osculatrice secondo una retta, un iperboloido a una falda determinato, dove i parametri cambiano per ciascuna retta;
 3. che qualsiasi superficie rigata ha per super-

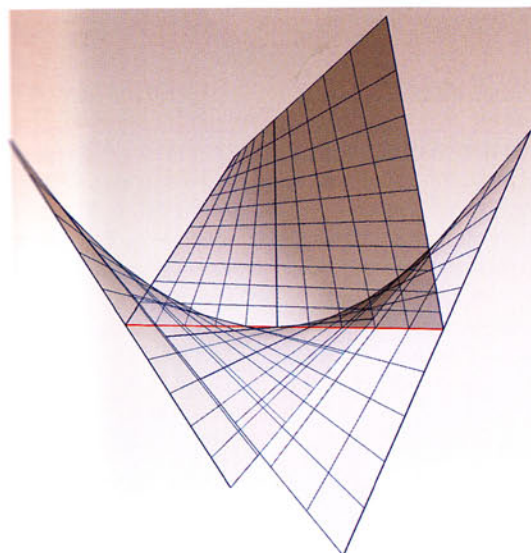


10/ Costruzione della superficie normale ad un paraboloido iperbolico secondo una retta generatrice (prima proprietà delle superfici rigate).

11/ Rappresentazione della prima proprietà di un paraboloido iperbolico ortogonale ad altro paraboloido iperbolico.

fici tangenti secondo una retta, un'infinità d'iperboloidi a una falda;

4. che due superfici rigate che hanno una retta comune e tre piani tangenti comuni in tre punti differenti di questa retta, sono tangenti l'uno all'altro in tutti i punti della retta comune».



3° Esercizio: costruzione della superficie normale ad una rigata secondo una retta generatrice

Dato un paraboloido iperbolico si sceglie una generatrice retta qualsiasi. Si costruiscono tre rette ortogonali alla superficie passanti per la retta generatrice. In questo modo si hanno una serie di rette ortogonali a una retta data. Si può controllare che la superficie normale sia un paraboloido iperbolico o un iperboloido, verificando l'esistenza o meno di piani direttori¹⁶. Per ottenere il quadrilatero sghembo manca la quarta retta che si ottiene facilmente costruendo un piano passante per la prima retta e per un punto della terza. Questo interseca la seconda retta in un altro punto. Unendo i due punti ottengo la retta mancante. Con le quattro rette si può generare il paraboloido iperbolico normale (figg. 9, 10, 11). Una volta ottenuta questa superficie, si deve verificare che questa sia effettivamente ortogonale in ogni suo punto alla superficie di partenza. Ciò si può dimostrare estraendo un numero a piacere di rette generatrici della superficie normale ed verificando l'ortogonalità di queste alla superficie di partenza nel punto di contatto.

Questa proprietà è valida per qualsiasi superficie rigata. Per accertarsene si può prendere una rigata generica, a partire da due curve sghembe qualsiasi, e il modellatore costruirà di default una rigata generica¹⁷, si può poi ripetere la costruzione precedente ottenendo una superficie normale che sarà o un paraboloido iperbolico o un iperboloido¹⁸.

4° Esercizio: costruzione di una superficie tangente ad una rigata secondo una retta generatrice

Per spiegare le ultime tre proprietà è preferibile partire dall'ultima, perché è la condizione necessaria affinché due superfici rigate siano tangenti lungo una retta comune.

È noto che le due superfici rigate di secondo grado possono essere generate da una retta in due modi differenti. Un punto qualunque di queste superfici è l'intersezione di due rette appartenenti ai due sistemi di generazione; ne segue che il piano tangente in questo punto è determinato da queste due ret-

12/ *Costruzione della quarta proprietà:* «due superfici rigate che hanno una retta comune e tre piani tangenti comuni in tre punti differenti di questa retta, sono tangenti l'uno all'altro in tutti i punti della retta comune».

In questo esempio sono state scelte tre rette appartenenti ad una stessa giacitura. Di conseguenza la superficie rigata tangente è un paraboloido iperbolico.

13/ *Rappresentazione di una superficie rigata*

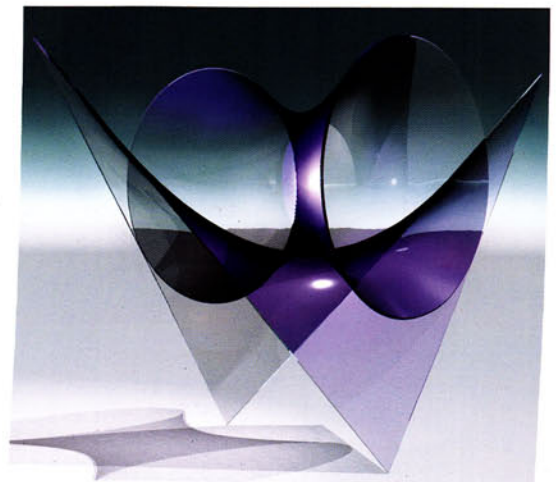
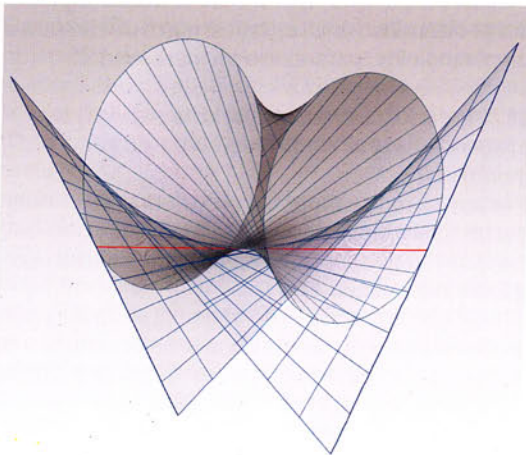
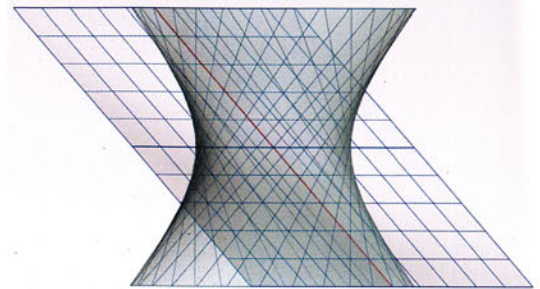
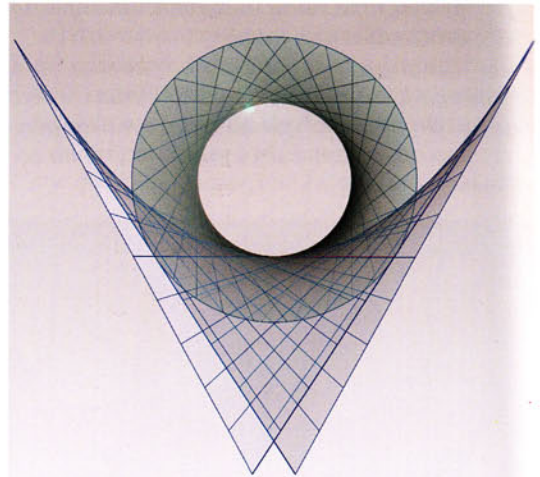
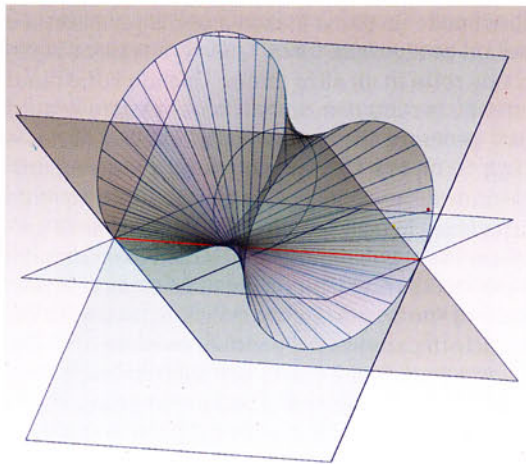
te. Se immaginiamo un piano passante per una retta generatrice qualsiasi e lo ruotiamo facendo cerniera sulla retta, questo in tutte le posizioni che assume è tangente alla superficie; quello che cambia è il punto di contatto e, per ottenerlo, basta trovare l'intersezione del piano con la superficie e trovare la seconda retta che appartiene alla rigata.

Tutte le rette passanti nell'angolo formato dalle due rette che determinano il piano tangente dell'iperboloido a una falda o del paraboloido iperbolico, sono secanti di queste superfici; ne segue che un pia-

tangente ad un iperboloido di rivoluzione secondo una retta generatrice.

14/ *Rappresentazione di un paraboloido iperbolico tangente ad un iperboloido di rivoluzione secondo una retta. Il piano di quadro è ortogonale al piano direttore del paraboloido.*

15/ *Rappresentazione di un iperboloido di rivoluzione tangente ad un paraboloido iperbolico (terza proprietà).*



16/ *Rappresentazione della seconda proprietà:*
 «qualsiasi superficie rigata ha per superficie osculatrice secondo una retta, un iperboloido a una falda determinato, dove i parametri cambiano per ciascuna retta».

17/ *Iperboloido osculatore di una superficie rigata generica.*

no è tangente a un iperboloido solo in un elemento infinitamente piccolo, in un punto solo, limite di questo elemento.

È possibile dimostrare che una superficie rigata generica e l'iperboloido a una falda, possono per una scelta opportuna delle rette direttrici di questa seconda superficie, essere tangenti lungo la retta; per questa ragione l'iperboloido a una falda è, rispetto alle superfici rigate, quello che il piano è rispetto alle superfici sviluppabili.

Tre linee qualsivoglia d'una superficie rigata dirigono il movimento della retta generatrice di questa superficie. Le tangenti a queste curve, passanti per i punti dove una retta qualunque della superficie le incontra, determinano un iperboloido tangente alla superficie secondo quella retta; abbiamo visto che un piano che ruota attorno d'una retta d'un iperboloido, è tangente in tutte le sue posizioni a questo iperboloido; ne segue che un piano che ruota attorno a una retta d'una rigata generica, è lo stesso in tutte le sue posizioni tangente a questa superficie, poiché sarà costantemente tangente a un'iperboloido che è lui stesso tangente alla superficie rigata.

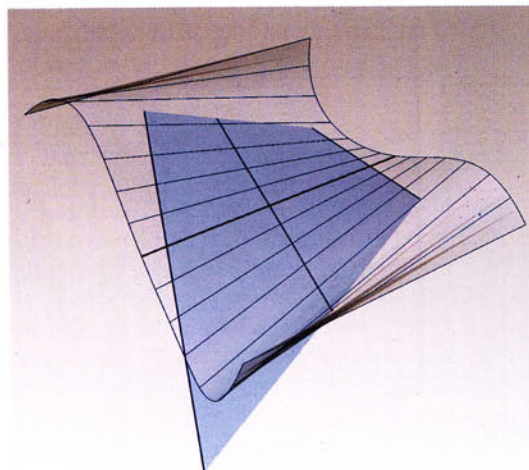
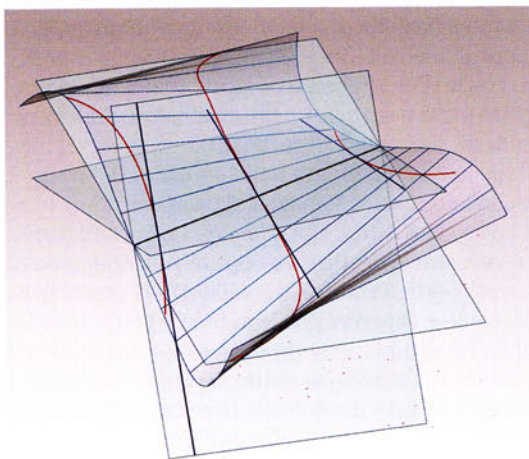
Avendo condotto per una retta d'una superficie rigata tre piani qualunque che la toccano in tre punti conosciuti, è evidente che tutte le rette passanti nei piani per i punti di contatto, saranno tangenti alla superficie: ora tre di queste rette prese nei tre piani (fig. 12), determinano un iperboloido tangente alla superficie rigata (figg. 13, 14); ne segue che due superfici rigate che hanno una retta comune e tre piani comuni in tre punti di questa retta, sono tangenti l'uno all'altro in tutti i punti della retta comune, perché saranno toccate secondo una retta da un iperboloido che avrà per direttrici tre rette passanti nei tre piani tangenti, per il punto di contatto di questi piani e delle due superfici.

5° *Esercizio: costruzione dell'iperboloido osculatore di una superficie rigata generica*

I tre piani tangenti passanti per una retta data d'una superficie rigata, e i tre punti di contatto, determinano un'infinità d'iperboloidi a una falda, tangenti alla superficie secondo una retta. Tra questi

iperboloidi, ce n'è uno più importante: iperboloido osculatore. Misura la curvatura d'un elemento sghembo della superficie rigata, come il cerchio misura quella della curva dove è osculatore.

La costruzione per trovare l'iperboloido osculatore è la seguente: tra i piani tangenti ad una superficie rigata, passanti per una retta r di questa superficie, tre qualunque di questi piani tagliano la superficie secondo tre curve c, c' e c'' che intersecano la retta r in tre punti M, M' e M'' ; le tangenti rispettive alle curve c, c' e c'' , passanti per i punti M, M' e M'' , so-



18/ Conoidi del trattato di Hachette. La figura in basso rappresenta l'arrière-voissure de Marseille. Le direttrici sono due archi di cerchio e una retta.

19/ Rappresentazione della *épure* de La Coupes des Pierres Arrière-voissure de Marseille di Hachette.

no le direttrici della retta generatrice dell'iperboloide osculatore (figg. 16, 17).

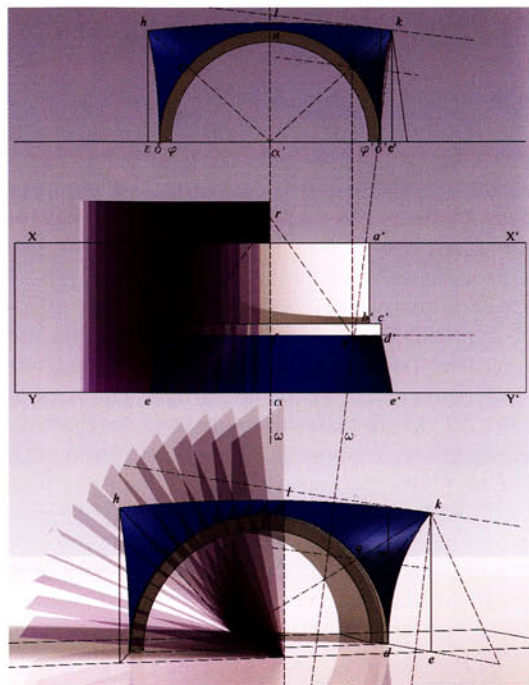
È evidente che l'iperboloide osculatore di un iperboloide è l'iperboloide stesso, in quanto le tre curve c , c' e c'' sono tre rette che appartengono all'altra schiera¹⁹.

Modellazione della *épure* de l'arrière-voissure de Marseille

L'ultimo esempio è un esercizio di stereotomia molto utile per capire le attuali procedure informatiche di generazione e costruzione della forma.²⁰

La modellazione di questo disegno²¹ è un'applicazione immediata dei principi che abbiamo esposto. Si tratta d'un esercizio di stereotomia in cui l'oggetto è una particolare volta chiamata arrière-voissure de Marseille²² (figg. 18, 19).

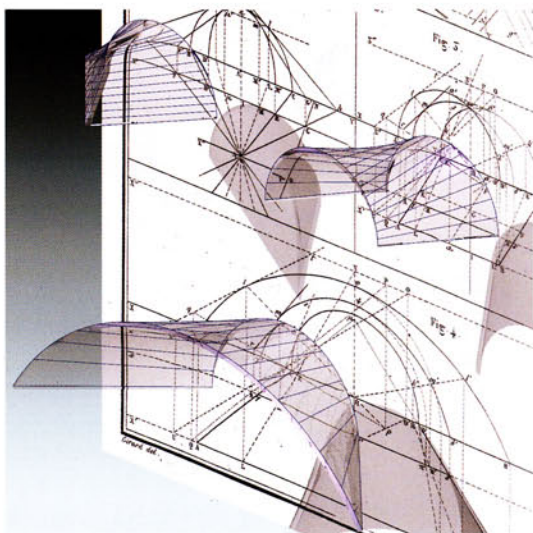
Il piccolo varco creato nello spessore del muro²³, chiamato volta di Marsiglia, si compone d'una volta a botte (porte droite) e d'una seconda volta (arrière-voissure), destinata a coprire l'allargamento di questa porta. Praticato per facilitare l'entrata delle carrozze e impedire che le ante in legno, che chiudono l'apertura, non urtino. Quest'ultima parte del passaggio, l'arrière-voissure, è formata da diverse superfici rigate dove le tre direttrici sono sempre



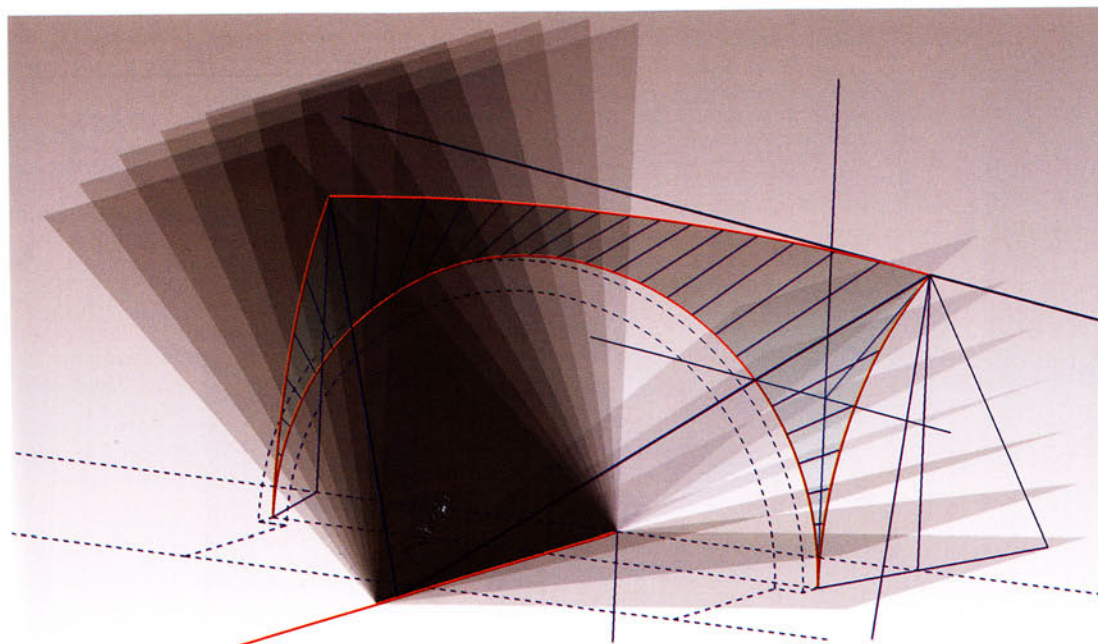
due archi di cerchio e una retta orizzontale. La particolarità dell'apertura consiste nel costruire la tangenza fra le tre superfici rigate che formano lo svasamento della seconda volta. Per fare ciò è necessario conoscere le proprietà già ricordate. Nella prima superficie dell'arrière-voissure, la posizione della generatrice una linea retta è determinata da tre condizioni: la prima, di passare per il cerchio verticale della scanalatura, di diametro dato; la seconda, di essere tagliata da un piano verticale, seguendo un arco di cerchio, dove il centro è sul piano verticale; la terza di passare per l'asse orizzontale (fig. 20).

L'arrière-voissure e la scanalatura hanno lo stesso piano di giunzione della prima volta (porte droite); e poiché tutti i piani di giuntura di questa apertura passano per l'asse orizzontale, ne segue che tagliano la superficie della volta secondo delle linee rette, che sono gli spigoli delle pietre di taglio di questa volta.

Supponiamo che l'arco di cerchio, che serve da di-



20/ Costruzione del modello de *La Coupes des Pierres*
Arrière-vousure de Marseille.



rettrice alla retta generatrice della prima superficie de l'arrière-vousure, sia dato: questo arco, quale che sia il suo raggio²⁴, sarà tagliato dalle verticali dei piani di strombatura, in due punti. I piani passanti per questi punti e per l'asse della porta dritta, tagliano il cerchio della scanalatura in due altri punti. Questi quattro punti determinano la posizione e la lunghezza delle rette limite della prima superficie della volta. Ne segue che questa superficie copre solamente lo spazio che corrisponde alla parte centrale (in pianta è la parte trapezoidale).

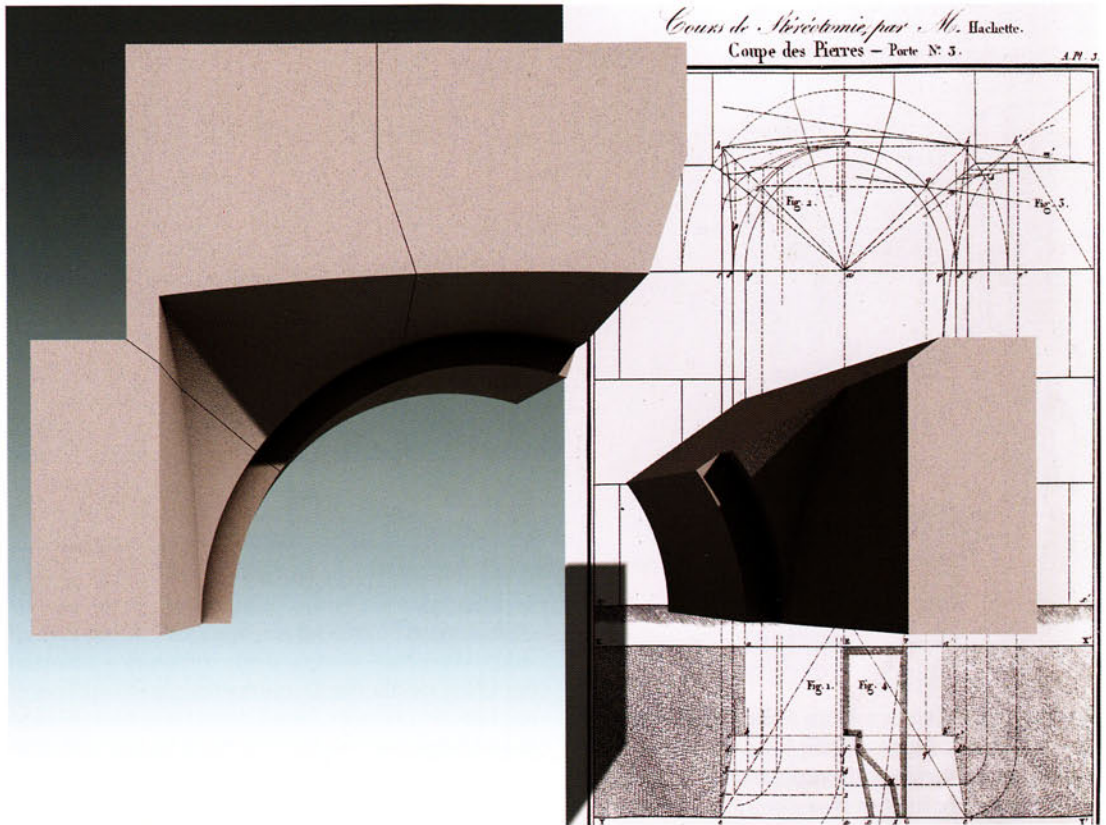
Due ulteriori superficie rigate coprono lo spazio corrispondente ai due triangoli in pianta, dove le generatrici si appoggiano, come per la prima superficie, per il cerchio della scanalatura e per l'asse. Queste hanno per direttrici dei cerchi dello stesso raggio, dati nei piani di svasamento. Il raggio di questi cerchi è almeno uguale alla metà della larghezza della scanalatura; se fosse più piccolo, le ante in legno, che si aprono secondo archi di cerchio non potrebbero appoggiarsi contro i piani di svasamento. La

condizione più importante, tuttavia, è che abbiano la stessa tangente nel punto di contatto con l'arrière-vousure. Così facendo si mette in atto quella condizione per cui: due superficie rigate che hanno una retta comune e tre piani tangenti comuni in tre punti differenti di questa retta, sono tangenti l'uno all'altra in tutti i punti della retta comune²⁵.

Conclusioni

Perché è interessante rileggere un "vecchio" trattato di geometria descrittiva alla luce delle nuove conoscenze? Attraverso le immagini di questo studio ho cercato di dare una risposta possibile. Uno studio che intende seguire quel rinnovamento della scienza della rappresentazione che ormai, da anni, ha coinvolto molti ricercatori dell'area. Aggiungo solo una considerazione che riguarda la rivoluzione informatica. Il computer ci dà l'illusione di vivere uno spazio tridimensionale alternativo e di poterlo effettivamente controllare. Ma il mondo della geometria è un mondo ideale. Ora, grazie a questa

21/ Rappresentazione della volta dell'arrière-vousure composta da cinque conci di pietra. I piani di taglio seguono l'andamento delle generatrici rette delle superfici rigate che formano l'intradosso. Per questioni di stabilità le superfici di taglio migliori dovrebbero seguire l'andamento di vari iperboloidi. Hachette, giustamente, ha scelto dei piani privilegiando l'aspetto pratico legato all'esecuzione del concio.



rivoluzione tecnologica, lo scarto tra il mondo reale e quello ideale della geometria si è fatto più sottile. Questo potrebbe indurre alcuni di noi ad abbassare la guardia, intendo, per esempio, a trascurare tutte quelle nozioni legate alla geometria dello spazio e alla geometria descrittiva. Mentre, proprio rileggendo i vecchi problemi alla luce delle nuove tecnologie, siamo in grado d'intensificare la conoscenza e scoprire nuove questioni.

Oggi, grazie all'informatica, possiamo osservare due superfici rigate che si "baciano". Hachette, dal canto suo, poteva solo immaginarle. Non bisogna dimenticare, in definitiva, che la geometria si vede prima nella nostra mente.

Note

¹ Jean Nicolas Pierre Hachette, *Traité de Géométrie descriptive*, Paris 1828. Il trattato è diviso in due libri: il primo contiene la geometria descrittiva pura; il secondo contiene due capitoli che hanno per titolo: 1° Luoghi geometrici (che comprendono la trattazione delle rigate); 2° Ombre e prospettiva lineare.

L'opera è chiusa da un'appendice nella quale vengono esposti i principi della stereotomia e i processi generali di quest'arte applicata al taglio delle pietre.

² Ho chiamato esercizi le costruzioni trattate riprendendo la struttura del libro di Hachette. Egli spiega le varie questioni della geometria descrittiva con degli esempi esplicativi (exercice).

³ Ho utilizzato i softwares Rhinoceros 3.0 e Think3 2006, sono entrambi dei modellatori Nurbs. <http://www.it.rhino3d.com/>; <http://www.think3.com/it/>;

⁴ «La géométrie descriptive, telle qu'on la considère dans ce premier livre, contient deux parties, l'une rationnelle, e l'autre technique.

La première, purement théorique, se rattache à une branche importante des mathématiques, qui embrasse toutes les propriétés de l'étendue figure, et que les plus grands géomètres ont traitée ou par l'analyse ou par la synthèse.

La partie technique de la géométrie descriptive est l'art de représenter sur des feuilles de dessin, les points et les lignes de l'espace; elle a pour base la méthode des projections; la pratique de cette méthode exige un coup d'oeil assuré, une main exercée, qui sache employer avec adresse la règle, le compas et l'équerre».

⁵ In questo studio mi attengo alla distinzione che Hachette fa all'interno delle superfici che hanno come generatrice una retta, per cui quando parlo di superfici rigate intendo tutte quelle che hanno curvatura gaussiana negativa e che non sono sviluppabili «Il y a deux espèces de surfaces engendrées par une droite: les unes qu'on nomme surfaces développables; les autres qu'on appelle surfaces gauches, qui ne sont point développables, et que j'ai proposé de nommer surfaces réglées, parce qu'on peut appliquer l'arête d'une règle sur les droites de ces surfaces», *Ibid.*, p. 27.

⁶ «On a appelé jusq'à présent surface gauche, toute surface engendrée par une droite mobile, quelle que soit la loi du mouvement de cette droite, pourvu néanmoins que deux droites consécutives, qui comprennent un élément de la surface, ne se rencontrent pas. Chaque élément est un élément est un petit plan gauche; mais l'ensemble de ces éléments forme souvent des surfaces très-régulières, qui ne conservent aucune apparence de difformité. Nous étions convenus avec Monge de les appeler surfaces réglées; ce qui motive cette dénomination, c'est qu'on peut appliquer une règle sur les droites de la surface, et s'assurer ainsi qu'elle est exécutée rigoureusement», *Ibid.*, p. XIII.

⁷ Le curve Nurbs sono definite da vari parametri fra cui il numero di archi (o spans) che definiscono la curva. La condizione necessaria e sufficiente affinché l'algoritmo Nurbs descriva l'equivalente di una retta è che la curva Nurbs abbia un solo arco di primo grado. Il fatto di essere formata da un solo arco garantisce che la curva non sia una linea spezzata, mentre il grado uno del polinomio garantisce che la curva sia un segmento lineare.

⁸ «Le parabole direttrici generano l'iperboloide completo, scorrendo l'una sull'altra», da: Riccardo Migliari, *Geometria dei Modelli*, ed. Kappa, Roma 2003, p. 203.

⁹ Le superfici possono anche essere classificate in base alla curvatura di Gauss. Le superfici rigate hanno sempre curvatura negativa. Le superfici sviluppabili hanno sempre curvatura nulla. Per un' approfondimento di questo concetto si rimanda al sito di Mathworld <http://mathworld.wolfram.com/GaussianCurvature.html> e al libro di Adrian Gheorghiu e Virgil Dragomir, *La Représentation des structures constructives*, Editions Eyrolles, Paris 1971.

¹⁰ Ciò si può esaminare prendendo, per esempio, due rette generatrici qualsiasi della rigata e verificare che non appartengano a una medesima giacitura. Si prende una retta generatrice b e si sposta con un vertice su un'altra retta generatrice qualsiasi appartenente alla superficie da esaminare. Si costruisce il piano individuato dalle due rette a e b . Adesso si prende una terza retta generatrice a caso c , appartenente sempre alla superficie rigata, e la si sposta con un suo vertice sullo spigolo delle rette a e b nel punto V . Se la superficie fosse a piano direttore la retta c dovrebbe appartenere al piano formato dalle rette a e b . In caso contrario, come nel nostro esempio, non si ha un piano direttore, di conseguenza la superficie costruita è una rigata generica.

¹¹ «Une surface développable est le lieu géométrique des tangentes à une corbe à double courbure, qu'on nomme arête de rebroussement de la surface», *Ibid.*, p. 28.

¹² «Tous ces éléments réunis sur un seul plan et même plan, forment ce qu'on appelle le développement de la surface», *Ibid.*, p. 29.

¹³ «Trois courbes sont nécessaires pour diriger le mouvement d'une droite qui engendre la surface réglée générale; mais lorsque cette surface est développable, deux courbes suffisent», *Ibid.*, p. 29.

¹⁴ Si prende un punto generico sulla prima tangente e si costruisce il contorno apparente del cono rispetto al punto scelto. In questo modo si trova il segmento che, insieme alla prima tangente, determina il piano cercato. Le linee del contorno apparente del cono generalmente sono più di una.

¹⁵ In Rhinoceros è possibile costruire una superficie sviluppabile tramite il comando *loft straight*.

¹⁶ Nell'esempio riportato in figura si riscontra la presenza di piani direttori, per cui si tratta di un altro paraboloido iperbolico, vedi nota 10.

¹⁷ Sia Think3 che Rhinoceros di default, per due curve sghembe costruiscono una rigata generica non a piano direttore. Per verificare basta ripetere la costruzione della nota 10 e osservare che la retta c non appartenga al piano.

¹⁸ L'ultima versione di Rhinoceros 04 ha un algoritmo che permette di costruire direttamente una superficie ortogonale a un'altra superficie secondo una linea qualsiasi. Ovviamente il risultato è sempre una rigata, quando la linea è una retta, l'algoritmo costruirà un paraboloido iperbolico. Questo studio è stato fatto con la versione precedente del software, in cui l'algoritmo in questione non era ancora disponibile.

¹⁹ Le superfici rigate di secondo grado possono essere generate in due modi possibili facendo scorrere una retta. Per cui in ogni punto troviamo due rette appartenenti alla superficie. Va da sé che per un paraboloido iperbolico vale la stessa regola.

²⁰ Cfr. Laura De Carlo, *Geometrie dal pensiero costruttivo nel trattato di stereotomia di Alonso de Vandelvira*, in: *Disegnare, idee immagini*, n. 28/2004.

²¹«Porte N°3 Arrière-voussure de Marseille» Ibid, p. 315. L'esercizio è complesso e richiederebbe una trattazione specifica per poterlo descrivere in modo esaustivo.

²²«Troisième exemple. Surface réglée de l'arrière-voussure de Marseille» Ibid, p. 93.

²³ Gli autori che hanno scritto sul taglio delle pietre, hanno distinto cinque specie di volte, che chiamiamo portes, voutes, descentes, trompes, escaliers. Le porte sono piccole volte praticate nello spessore del muro e destinate a

coprire un passaggio o a illuminare l'interno di una volta. Le volte e le porte che si intersecano, o si collegano, nascono dallo stesso piano orizzontale.

²⁴ Una condizione importante è che gli archi consentano l'apertura delle ante.

²⁵ Gli altri due piani tangenti si hanno lungo la retta generatrice nei punti d'intersezione con la seconda e la terza direttrice.

References

1. ASCHIERI, Ferdinando. *Geometria descrittiva dello spazio*. Hoepli, Milano. 1895.
2. DE CARLO, Laura. *Geometrie dal pensiero costruttivo nel trattato di stereotomia di Alonso de Vandelvirai*. In *Disegnare, idee immagini*, n. 28. 2004.
3. FIEDLER, William. *Trattato di geometria descrittiva*, a cura di Antonio Sayno ed Ernesto Padova, Firenze. 1874.
4. GHEORGHIU, A. and DRAGOMIR, V. *Geometry of structural Forms*. Applied Science Publisher LTD, Bucarest. 1978.
5. HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Traité de géométrie descriptive*. Paris: Corby, 1822, pp.283-286.
6. HILBERT, David. *Geometria intuitiva*. Boringhieri, Torino. 1972.
7. LORIA, Gino. *Storia della geometria descrittiva dalle origini ai giorni nostri*. Milano: Hoepli, 1921.
8. MIGLIARI, Riccardo. *Geometria dei modelli*. Kappa edizioni, Roma. 2003.
9. MONGE, Gaspard. *Géométrie Descriptive*. 1795 (riprod. anastatica, Sceaux: Jacques Gabay, 1989. ISBN: 2-87647-065-9).