L'estensione del problema di Apollonio nello spazio e L'Ecole Polytechnique

Federico Fallavollita

Abstract

In quest'articolo sono descritte due possibili soluzioni del problema di Apollonio nello spazio. Lo spunto sono alcune importanti considerazioni fatte, intorno al 1810, all' Ecole Polytechnique di Parigi. Il modo di trovare una sfera tangente ad altre quattro pare abbia particolarmente interessato i ricercatori dell'epoca. Nello specifico sono stati esaminati il Traite de géométrie descriptive (Paris 1828) di Jean Nicolas Pierre Hachette (1769 – 1834) e il Mèmoire (le 15 Juin 1812, Journal de l'école polytechinique, XVI, 124 – 214) di Louis Gaultier (1776 – 1845). Entrambi sono stati allievi e poi professori nella stessa scuola dove insegnò Gaspard Monge (1746 – 1818).

Gli obiettivi principali che si vogliono perseguire, attraverso la sperimentazione di costruzioni geometriche nel laboratorio virtuale della geometria descrittiva, per mezzo, cioè, della rappresentazione digitale, sono:

- descrivere la costruzione di una sfera tangente ad altre quattro, date, con riga e compasso (con il metodo di Gaultier);
- descrivere la costruzione di una sfera tangente ad altre quattro, date, attraverso le sezioni di un cono retto (con il metodo di Hachette);
- illustrare tale soluzione rappresentando le considerazioni di Hachette;
- infine mettere in luce come queste considerazioni siano in relazione con la soluzione proposta da Riccardo Migliari in questo stesso volume, ispirata alle analisi di Adriaan van Roomen (1561 – 1615) e, con lo studio di Kasner illustrato, sempre in questo volume, da Leonardo Baglioni.

Questo lavoro si colloca nell'ambito del rinnovamento della geometria descrittiva attualmente promosso dalla scuola romana.

La rappresentazione digitale dà la possibilità di raggiungere un livello di evidenza visiva che prima era irraggiungibile e, attraverso questa evidenza, raggiungere una semplificazione dei problemi e delle loro soluzioni, che è anche generalità del risultato. Concludendo questo studio vuole essere un contributo al rinnovamento della geometria descrittiva. In questo quadro, il disegno geometrico è da considerarsi, prima di tutto, come uno strumento della logica e la rappresentazione non è più soltanto un mezzo per creare immagini, ma è uno strumento di invenzione e di scoperta

Ikhnos

Analisi grafica e storia della rappresentazione

2008

Università degli Studi di Catania - Facoltà di Architettura - Siracusa

Lombardi editori - Siracusa

Ikhnos

Analisi grafica e Storia della Rappresentazione
2008

Redazione: via Maestranza 99 - 96100 Siracusa.

tl. 0931-469608/09; fax: 0931-469642; email ikhnos@tin.it

Collana diretta da	Giuseppe Pagnano
Comitato di redazione	Edoardo Dotto, Eugenio Magnano di San Lio, P. Cono Terranova
Progetto grafico e impaginazione	Antonino Gennaro
Scansioni	Paolo Leone
Traduzioni in inglese	United College - Siracusa
Traduzioni in francese	Ghislaine Desjonquères

Hanno partecipato a questo volume:

- Leonardo Baglioni,	dottorando in *Scienze della Rappresentazione e del Rilievo*, Università La Sapienza di Roma
- Edoardo Dotto,	associato di *Disegno dell'Architettura*, Fac. di Architettura di Siracusa, Università di Catania
- Federico Fallavollita,	dottorando in *Scienze della Rappresentazione e del Rilievo*, Università La Sapienza di Roma
- Giuseppe Immè,	specializzato in *Storia dell'Arte medievale e moderna*, LUMSA di Palermo
- Marco Meola,	dottore di ricerca in di *Storia dell'Architettura e della Città*, Fac. di Architettura, Università di Napoli "Federico II"
- Riccardo Migliari,	ordinario di *Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva*, Prima Fac. di Architettura "L. Quaroni", Università La Sapienza di Roma
- Ciro Robotti,	ordinario di *Disegno dell'Architettura*, Fac. di Architettura "Luigi Vanvitelli", Seconda Università di Napoli
- Livio Sacchi,	ordinario di *Disegno dell'Architettura*, Fac. di Architettura, Università di Pescara
- Chiara Vernizzi,	ricercatore di *Disegno dell'Architettura*, Fac. di Ingegneria, Università di Parma

Volume stampato con fondi della Facoltà di Architettura di Catania con sede a Siracusa

Stampato presso la tipografia Grafica Saturnia, via Pachino 13, Siracusa

Lombardi editori, Siracusa

ISBN 978-88-7260-170-9

Indice

L'estensione del problema di Apollonio nello spazio e l'Ecole Polytechnique

Federico Fallavollita

Premessa

In quest'articolo sono descritte due possibili soluzioni del problema di Apollonio nello spazio. Prendo spunto da alcune importanti considerazioni fatte, intorno al 1810, all'Ecole Polytechnique di Parigi. Il modo di trovare una sfera tangente ad altre quattro pare abbia particolarmente interessato i ricercatori dell'epoca. Nello specifico, ho esaminato il trattato di Jean Nicolas Pierre Hachette[1] (1769-1834) e il *Mèmoire* di Louis Gaultier[2] (1776-1845). Entrambi sono stati allievi e poi professori nella stessa scuola dove insegnò Gaspard Monge (1746-1818).

Gli obiettivi principali che si vogliono perseguire, attraverso la sperimentazione di costruzioni geometriche nel laboratorio virtuale della geometria descrittiva, per mezzo, cioè, della rappresentazione digitale, sono:

- descrivere la costruzione di una sfera tangente ad altre quattro, date, con riga e compasso (con il metodo di Gaultier);

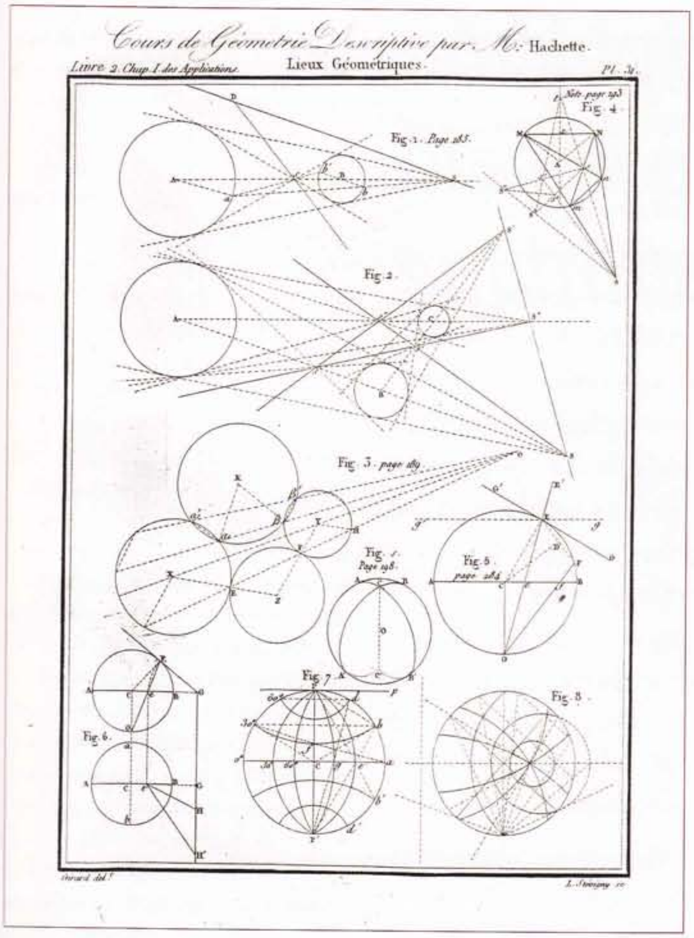
- descrivere la costruzione di una sfera tangente ad altre quattro, date, attraverso le sezioni di un cono retto (con il metodo di Hachette);

- illustrare tale soluzione, rappresentando le costruzioni di Hachette;

- infine, mettere in luce come queste costruzioni siano in relazione con la soluzione proposta da Riccardo Migliari in questo stesso volume, ispirata alle

1 J.N.P. Hachette (1769-1834), *Traité de géométrie descriptive*, Paris 1828.

2 L. Gaultier de Tours, *Mémoire, Sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle determiné par trois conditions, et une Sphère determinée par quatre conditions. Lu à la première Classe de l'Institut, le 15 Juin 1812*, «Journal de l'École polytechnique», XVI, 124-214.

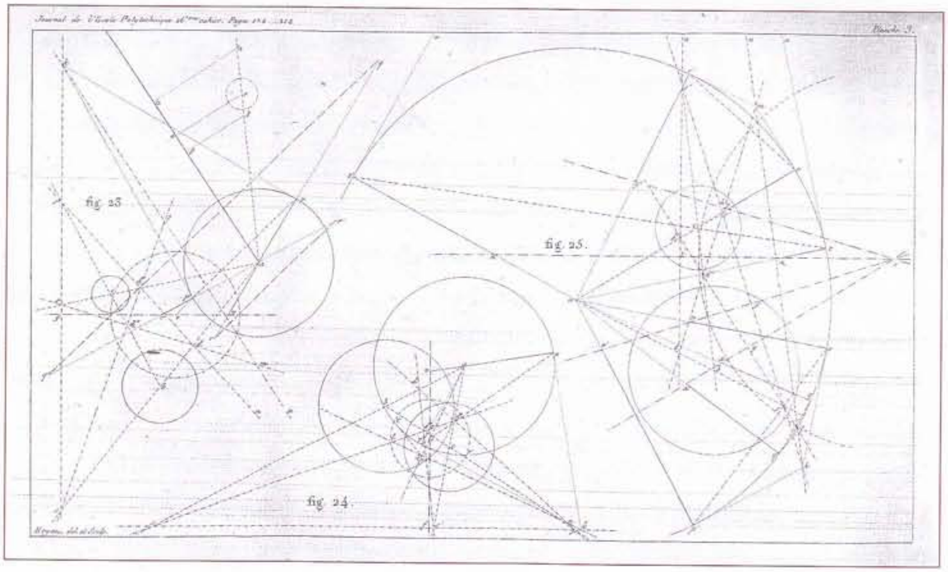


1 - *La tavola di Jean Nicolas Pierre Hachette che mostra la soluzione del problema di Apollonio nello spazio (1824)*

analisi di Adriaan van Roomen (1561-1615) e, con lo studio di Kasner illustrato, sempre in questo volume, da Leonardo Baglioni. Questo studio si colloca nell'ambito del rinnovamento della geometria descrittiva attualmente promosso dalla scuola romana.

Prima di descrivere le esperienze è opportuno fare una breve premessa di carattere storico. Hachette, nel suo trattato del 1828 e in due articoli precedenti del 1808[3], spiega come trovare una sfera tangente ad altre quattro utilizzando la sezione di un cono retto. Egli, però, non rappresenta tale soluzione, ma ne dà solo una descrizione logica, accompagnata da qualche disegno. Disegno che, come si può vedere, è più vicino a uno schema che a una *épure* di scuola mongiana (fig. 1). Nello stesso periodo, Gaultier stabilisce come risolvere il problema utilizzando solo la riga e il compasso; questo risultato teorico gli permette di arrivare ad una rappresentazione[4] (fig. 2), e quindi di verificare sperimentalmente le proprie ipotesi. Vorrei far notare che Gaultier è costretto a scrivere ben cento pagine di saggio per spiegare la sua 'singolare'[5] soluzione, mentre Hachette ne utilizza dieci!

Una questione che vorrei anche mettere in evidenza riguarda le velate critiche che Gaultier rivolge ai suoi colleghi, «géomètres distingués», nella sua breve



2 - *La tavola di Louis Gaultier che mostra la soluzione del problema di Apollonio nello spazio tramite riga e compasso (1812)*

[3] J.N.P. Hachette, *Correspondance sur l'école impériale polytechnique, à l'usage des élèves de cette école*, t. 1 (avril 1804/mai 1808)-1816, Paris, Imprimerie de H. Perroneau, 1808-1816.

[4] Anche i disegni di Gaultier sono di difficile lettura. Inoltre egli sembra utilizzare di più l'operazione di ribaltamento che le doppie proiezioni ortogonali. In più c'è il fatto che questi disegni sembrano trattare solo un problema piano e non nello spazio.

[5] Hachette nel suo trattato cita il lavoro di Gaultier usando queste parole: «Le seizième cahier du Journal de l'Ecole polytechnique contient des recherches *fort curieuses* sur le contact des sphères, par M. Gaultier, professeur de géométrie au conservatoire des arts et metiers», J.N.P. Hachette, *Traité* cit., p. 184.

prefazione al *Mémoire* citato; dice di ammirare le loro deduzioni e scrive che queste sono «des trés-belles considerations géométriques». Subito dopo, però, critica i suoi predecessori perché hanno tentato di risolvere un problema senza aver verificato le proprie ipotesi con il disegno[6]. In sostanza, io credo che Gaultier critichi Hachette perché ha tentato di risolvere un problema attraverso le coniche, difficili da disegnare, nel XIX secolo, con una precisione tale da consentire una verifica sperimentale. A questo proposito, vorrei ancora ricordare la diatriba[7] tra François Viète[8] e Adriaan Van Roomen[9]. Infatti l'oggetto è il medesimo, ma con due sostanziali differenze. La prima è che nel 1600 la questione è nel piano mentre nel 1800 è nello spazio. La seconda è che Gaultier, figlio del secolo dei Lumi, non si sente vincolato, come Viète, alle regole degli antichi e dunque la ragione che lo induce a scegliere la riga e il compasso è esclusivamente legata all'aspetto sperimentale del metodo, alla sua maggiore accuratezza. La conferma sta nel fatto che Gaultier non può fare a meno di lodare sinceramente i suoi colleghi. Oggi, due secoli dopo Gaultier e quattro dopo Viète, grazie alla rivoluzione informatica, possiamo dare forma ai pensieri di Hachette e avere la verifica sperimentale delle sue brillanti ipotesi. Inoltre possiamo rielaborare tali ipotesi per arrivare in modo più agile alla soluzione finale.

Perciò, come ho detto, lo studio che segue è strutturato in tre parti. Nella prima viene descritta la procedura per la ricerca di una sfera tangente ad altre quattro secondo le regole di Gaultier. Nella seconda si espongono e rappresentano le considerazioni di Hachette. Nella terza si propone una soluzione rielaborata che prende spunto da tali riflessioni. Infine basterà notare la relazione esistente tra le considerazioni di Hachette e la curva intersezione degli iperboloidi di rivoluzione dedotti da Van Roomen, per dimostrare la natura di tale curva.

••••••

Chiediamoci ora come trovare una sfera tangente ad altre quattro, date, servendosi di riga e compasso, con il metodo di Gaultier.

L'intento è quello di verificare sperimentalmente la soluzione elaborata da Gaultier per poterne dedurre alcune considerazioni significative. Non entrerò, quindi, nel merito della teoria dei radicali geometrici (cerchi, assi, sfere, piani e serie relative), ma me ne servirò direttamente, per costruire una delle possibili sfere tangenti ad altre quattro. Ciascuno può trovare le chiare dimostrazioni delle proprietà di questi enti geometrici nel saggio di Gaultier. Tuttavia, per poter verificare la soluzione, è necessario prima descrivere brevemente gli enti geometrici oggetto della teoria dei radicali.

Dati un punto **O** e un cerchio **A**, esiste solamente un cerchio ***O radicale A***[10] (fig. 3). Questo cerchio è l'unico, di centro **O**, ortogonale ad **A**[11]. Per determinare il raggio del cerchio **O** radicale **A** basta costruire la tangente dal punto **O** al cerchio **A**.

6 «Lo spirito che regnava in queste discussioni non permetteva di immaginare che, se gli studiosi che se ne sono occupati, avessero costruito [disegnato quindi] le soluzioni di questi problemi, si sarebbero accorti che questa deduzione era inesatta [il numero delle soluzioni]; purtroppo le considerazioni che hanno utilizzato, nonostante fossero molto *ingegnose, rendevano la costruzione grafica troppo difficile perché essi potessero accorgersi dell'errore*», L. Gaultier de Tours, *Mémoire* cit., p. 12. L'errore di cui parla Gaultier è la stima sbagliata del numero di soluzioni possibili che all'epoca pare fosse una questione ancora aperta. Gaultier afferma che solo dopo le sue considerazioni si è arrivati alla certezza del numero sedici.

7 Per capire la questione si rimanda all'articolo di Riccardo Migliari sempre in questo volume.

8 F. Viète, *Apollonius Gallus seu, Exsuscitata Apollonii Pergaei peri epafwn Geometria*, Ad V. C. A. R. Belgam, Parigi 1600. Viète risolve il problema di Apollonio tramite l'uso esclusivo di riga e compasso. Nel suo *Apollonius Gallus* rimprovera van Roomen per non avere risolto il problema come un vero "geometra".

9 A. van Roomen, *Problema Apolloniacum, Adrianum romanum constructum*, Wirceburgi 1596. È in questo saggio che Van Roomen espone la sua soluzione del problema di Apollonio tramite l'intersezione di due iperboli.

10 L. Gaultier de Tours, *Mémoire*, cit., p. 131: «Cerchio il cui raggio ha per valore la radice quadrata del prodotto costante formato dalle parti delle secanti o delle corde condotte dal centro O alla circonferenza del centro primitivo A al quale si rapporta».

11 Per la definizione di ortogonalità tra cerchi e sfere, vedi il saggio di L. Baglioni, in questo stesso volume

12 L. Gaultier de Tours, *Mémoire*, cit., p. 139.

Dati due cerchi **A** e **C**, esistono ***cerchi radicali comuni*** ad **A** e **C**[12]. I centri di questi cerchi descrivono una retta **o'** detta "asse radicale" ***AC***, luogo di tutti i centri dei cerchi radicali comuni **AC** (fig. 3). Per determinare l'asse radicale si costruisce un cerchio qualsiasi che intersechi i due cerchi **A** e **C**. Si fanno passare due rette per i punti intersezione. Dal punto in cui le due rette s'incontrano si stacca l'asse radicale, che è perpendicolare alla retta che congiunge i centri **A** e **C**.

Infine, dati tre cerchi **A**, **B**, **C**, è possibile individuare il centro **O** del cerchio radicale comune **ABC** intersecando due assi radicali, per esempio gli assi **AB** e **BC** (fig. 4).

Queste semplici considerazioni possono essere immediatamente estese allo spazio.

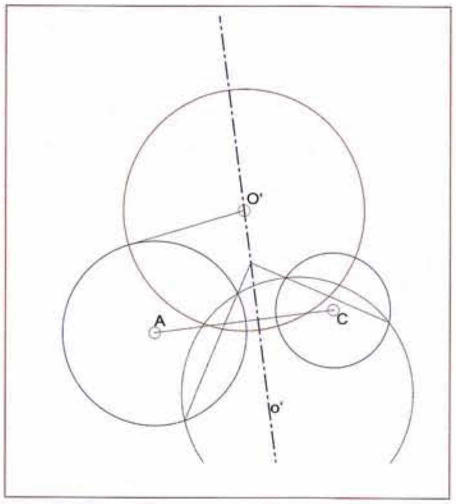
Infatti, data una sfera **A** e un punto dello spazio, esiste una sola sfera radicale *A*.

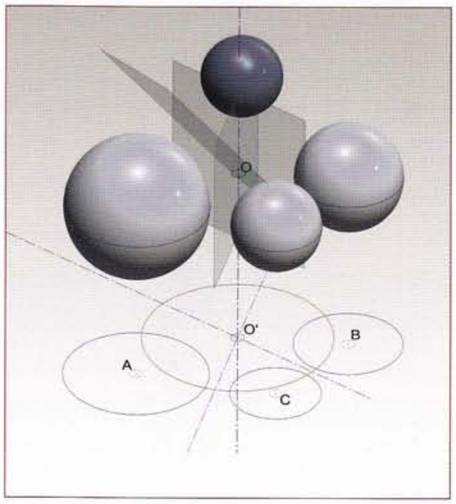
Date due sfere **A** e **B**, esistono sfere radicali comuni ***AB*** i cui centri appartengono al piano radicale ***AB***.

Date tre sfere, i tre piani radicali, che possono essere costruiti, si intersecano nell'asse radicale **ABC**, perpendicolare al piano individuato dai centri.

Di conseguenza, date quattro sfere **A**, **B**, **C**, **D**, esiste un'unica sfera radicale comune **ABCD** il cui centro è il punto in cui si incontrano gli assi radicali delle terne che è possibile costruire. Dal punto di vista operativo, per determinare il centro **O** della sfera radicale comune **ABCD**, consideriamo il piano che passa per i centri delle tre sfere **A**, **B**, **C**. Costruiamo due dei tre assi radicali dei cerchi massimi di **A**, **B**, **C**. Queste rette sono le tracce, sul piano **ABC**, di due "piani radicali" che, intersecandosi, danno luogo all'asse radicale comune alle tre sfere. Il centro della sfera radicale comune alle quattro sfere date, appartiene al piano radicale **AD** e all'asse radicale **ABC** (fig. 4).

••••••





3 - Il cerchio radicale è «il cerchio il cui raggio ha per valore la radice quadrata del prodotto costante formato dalle parti delle secanti o delle corde condotte dal centro O alla circonferenza del centro A al quale si rapporta»

4 - Costruzione del centro di una sfera radicale O comune ad altre quattro date

Ciò premesso, possiamo occuparci della soluzione vera e propria, cominciando col riprendere il problema di Apollonio nel piano.

Sono dati tre cerchi **A**, **B**, **C**. Due cerchi, esterni l'uno all'altro, hanno quattro tangenti che s'incontrano in due punti **S** e **D** (fig. 5)[13]. I tre cerchi **A**, **B** e **C** individuano, dunque, sei punti **S, S', S'', D, D', D''** che sono le intersezioni delle tangenti comuni a ciascuna coppia. Per questi punti è possibile far passare quattro rette in modo che: ogni punto **S** sia allineato con altri due punti **D** e che i tre punti **S** siano allineati sulla stessa retta[14]. Per brevità distingueremo queste quattro rette con le seguenti lettere:

s , quella che appartiene ai punti **S, S', S''**;

s', quella che appartiene ai punti **S, D', D''**;

s'', quella che appartiene ai punti **D, D', S'**;

s''', quella che appartiene ai punti **D, D'', S''**.

Tracciamo ora il cerchio radicale comune **ABC** e sia **O'** il suo centro (fig. 6). Questo cerchio **O'** radicale **ABC** interseca ortogonalmente i cerchi **A, B, C** in sei punti. Consideriamo i punti **E, F** intersezioni del cerchio **O'** con il cerchio **A** e facciamo passare una retta per questi punti fino ad incontrare la retta **s** nel punto **P**.

Il punto **G**, contatto della tangente condotta da **P** al cerchio **A** è anche il punto di contatto, con il cerchio **A**, di uno dei cerchi che risolvono il problema. Ciò significa, com'è evidente, che il centro di detto cerchio si trova sulla perpendicolare condotta alla retta **PG** nel punto **G**. Gaultier dimostra[15] inoltre, che il centro che cerchiamo si trova sulla perpendicolare **p** condotta dal punto **O'** alla retta **s**, e perciò il centro stesso resta individuato.

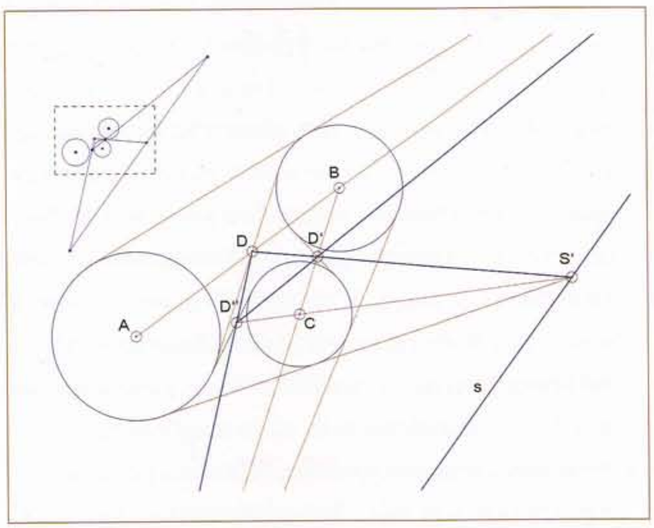
Si noti che dal punto **P** è possibile staccare due tangenti al cerchio **A** per individuare, oltre a **G**, il punto **H**. Esiste dunque un secondo centro che si trova sulla perpendicolare condotta da **H** alla medesima retta **p**.

Ebbene, ciascuna delle quattro rette **s** fornisce due soluzioni del problema e

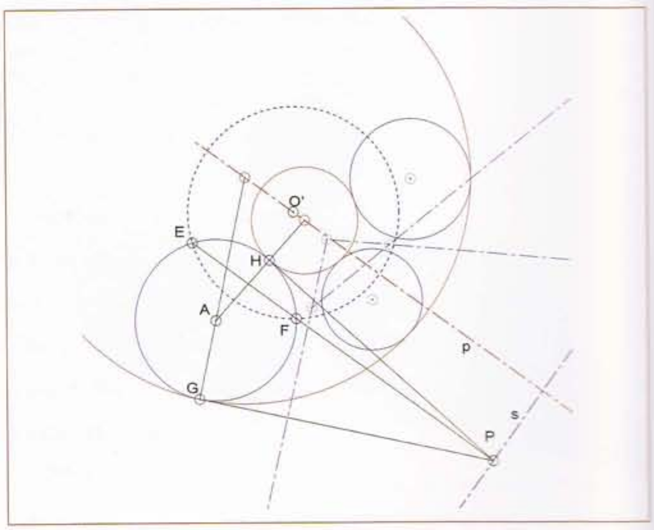
[13] Gaultier usa la teoria dei radicali per dimostrare l'esistenza dei due punti S e D. Ma sempre Gaultier ricorda che è possibile individuare i punti utilizzando il teorema dei cerchi di Monge, che è il metodo illustrato.

[14] Ivi, p. 182: «Les six points s ou d sont trois à trois en ligne droite».

[15] Ivi, p. 184.



5 - Costruzione del noto teorema dei cerchi di Gaspard Monge



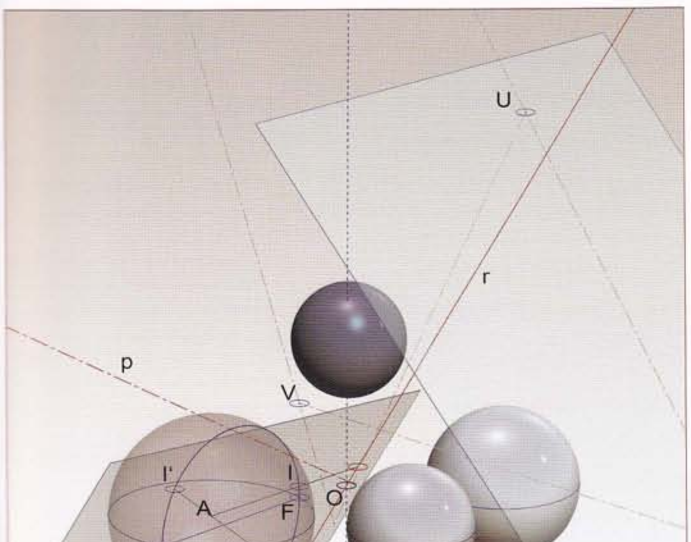
6 - Soluzione del Problema di Apollonio nel piano tramite riga e compasso (metodo di Gaultier) perciò, la reiterazione di questa costruzione fornisce le otto soluzioni richieste. I centri di queste otto soluzioni, quindi, sono situati a coppie sulle quattro ortogonali alle rette suddette. Queste ortogonali s'incontrano tutte nel punto **O'**.

Consideriamo adesso il problema nello spazio (fig. 7). I tre cerchi **A**, **B**, **C** diventano i cerchi massimi di tre delle sfere date, ottenuti sezionandole con il piano appartenente ai centri. Consideriamo anche una sfera **D** nello spazio. E' possibile individuare il punto **O**, centro della sfera radicale comune **ABCD**, sull'asse **o**. I punti di contatto **G** e **H**, come sopra costruiti, individuano il diametro di un cerchio minore della sfera **A**. Gaultier dimostra[16], attraverso la teoria dei radicali, che questo cerchio **c** è il luogo geometrico dei punti di contatto della sfera **A** con le infinite sfere tangenti ad **A, B e C** e che i centri di queste sfere si trovano sulla perpendicolare al piano **ABC** condotta nel centro **O** della sfera radicale comune **ABCD**.

Reiterando la costruzione piana che abbiamo esposto, è possibile individuare, sulla sfera **A,** in tutto quattro cerchi luogo dei punti di contatto di altrettante schiere di sfere tangenti. In particolare, il cerchio **c** è quello relativo alle sfere **AiBiCi** e **AeBeCe**[17].

I centri delle quattro sfere date, individuano un tetraedro. È possibile allora costruire per ogni piano del tetraedro i sei punti del tipo **S** e **D**. Di conseguenza è possibile tracciare nello spazio sedici rette del tipo **s, s', s'', s'''**. Se consideriamo il piano che passa per **A**, **B** e **C** come orizzontale, avremo dodici punti **S** e **D**, di cui sei nel piano orizzontale e sei nello spazio. Adesso le dodici linee **s** inclinate nello spazio (consideriamo le quattro linee **s** di **A**, **B**, **C** nel piano) intersecano, due a due, il piano orizzontale in ciascuno dei sei punti **S**, **S'**, **S''** e **D**, **D'**, **D''**, in modo che ciascuna linea **s** orizzontale è intersecata solo da sei delle dodici linee nello spazio, e non lo è dalle altre. È possibile verificare, e Gaultier lo dimostra, che delle sei linee inclinate, tre appartengono a un piano e tre a un altro[18]. Allora per individuare questi due piani **s** basta considerare una retta **s** orizzontale e due punti **S** e **D** nello spazio. Rinominiamo questi due punti **U** e **V**. Non occorre, dunque, considerare tutte e quattro le configurazioni di punti di tipo **S** e **D** e rette di tipo **s**: basta considerare due soli piani, ad esempio **ABC** e **ABD** per costruire i punti **U** e **V** e avviare a compimento la costruzione delle sfere tangenti.

Infatti, facciamo passare un piano **s** per la retta **s** e per il punto **U** (fig. 7). Conduciamo dal punto **O**



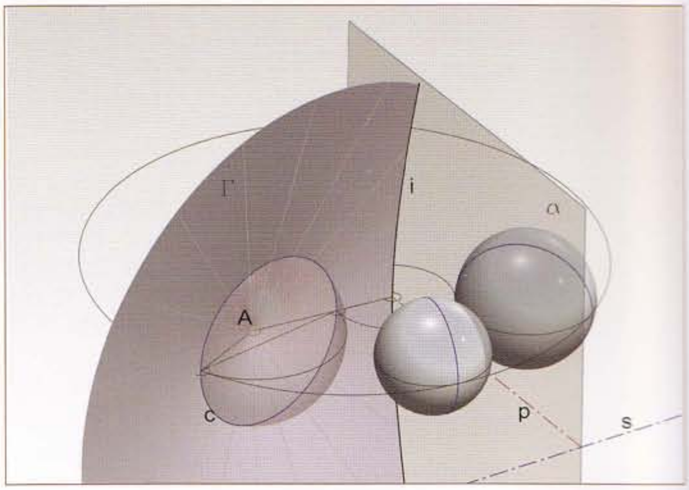
7 - Soluzione del Problema di Apollonio nello spazio tramite riga e compasso (metodo di Gaultier)

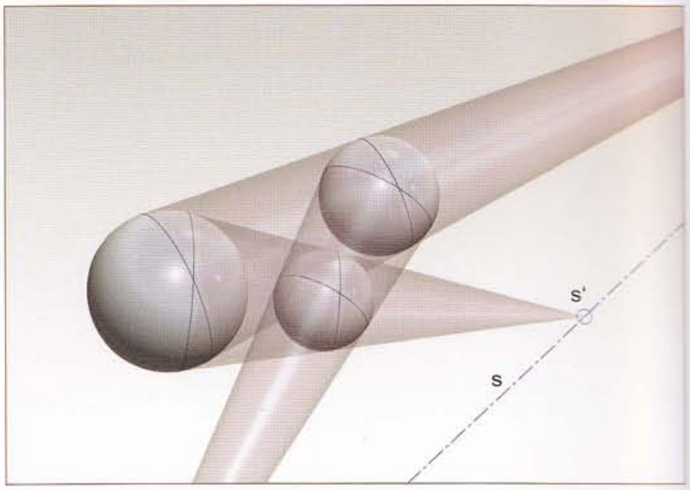
[16] Ivi, p. 201: «Etant données trois sphére A, B et C, la courbe formée sur chacune d'elles par la suite des points de contact d'une sphére variable, est un cercle.»

[17] Un cerchio può essere toccato in due modi differenti: all'interno (i) o all'esterno (e). Nel caso i cerchi sono tre le otto soluzioni possibili sono indicate così: AiBiCi ,quello che li tocca tutti all'interno, AiBiCe, AiBeCi, AiBeCe, AeBiCi, AeBiCe, AeBeCi, AeBeCe - quello che li tocca tutti all'esterno. Per approfondire si rimanda all'articolo di Riccardo Migliari in questo volume.

[18] L. Gaultier de Tours, *Mémoire*, cit. p. 190: «Nous allons démontrer que des six lignes F inclinées, qui rencontrent une meme ligne F horizontale, trois sont dans un premier plan, et les trois autres dans un second plan mené par cette ligne F horizontale».

8 - Date tre sfere A, B, C: la curva c descritta, sulla superficie delle sfere date, dai punti di contatto con le indeterminate sfere tangenti è un cerchio; la curva i descritta, nello spazio, dai centri delle sfere tangenti è una conica





9 - I tre coni circoscritti alla tre coppie che possono essere composte con tre sfere distinte hanno i vertici allineati su una retta (teorema di Monge)

una ortogonale **r** al piano **s**. Facciamo passare un piano **t** dalla retta **r** al centro **A** della sfera omonima. Questo piano, se le soluzioni esistono, interseca la circonferenza **c** in due punti **I** e **I'**. Sono questi i punti di contatto delle sfere **AiBiCiDi** e **AeBeCeDe** tangenti ad **A**.

Per trovare i due centri basta unire i due punti di contatto con il centro **A** e trovare i punti d'intersezione con la retta **r** - nella figura indicati con il cerchietto rosso.

Per concludere abbiamo quattro rette **s** nel piano **A**, **B**, **C** e due punti **U** e **V** nello spazio. Possiamo far passare per ogni retta **s** due piani **s** che passano, l'uno per il punto **U** e l'altro per il punto **V**. Avremo quindi otto piani **s** da cui potremo staccare otto perpendicolari **r** passanti per il punto **O**. E per ogni retta **r** avremo due soluzioni, e sedici soluzioni in tutto.

Adesso osserviamo che i due centri delle sfere tangenti che abbiamo trovato si trovano sullo stesso piano verticale individuato dalle due rette **r** e **p** , inoltre questo piano è ortogonale alla retta **s**. Rinominiamo questo piano α. È possibile allora costruire un cono retto **G** - è lo stesso Gaultier che lo fa notare - che ha il centro **A** come vertice e il cerchio **c** come base. Intersecando questo cono con il piano α otteniamo una conica, che generalmente è un iperbole, ricordiamola con la lettera **i** (fig. 8). Questa curva è lo stesso luogo geometrico considerato da Hachette ed è il medesimo luogo costruito da Migliari, estendendo allo spazio le osservazioni di Van Roomen.

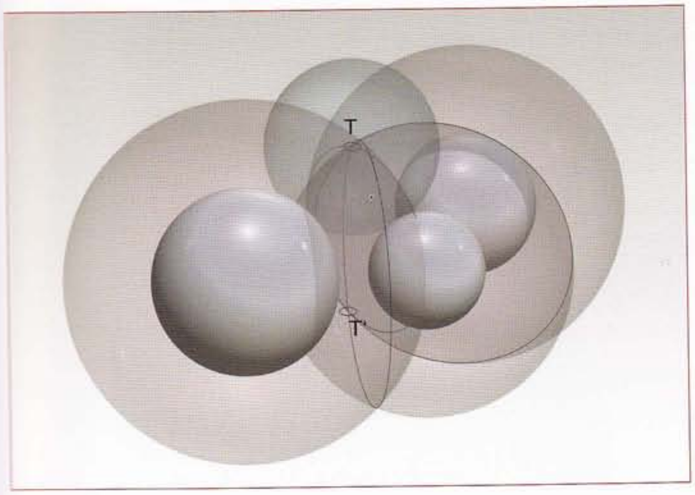
Rappresentiamo ora le considerazioni di Hachette sul problema di Apollonio nello spazio[19].

Tutta la dimostrazione di Hachette ruota intorno al noto teorema di Monge che può essere così enunciato: i tre coni circoscritti alla tre coppie che possono essere composte con tre sfere distinte hanno i vertici collineari.

Consideriamo dunque tre sfere **A**, **B** e **C** e la retta **s** sulla quale si trovano i coni dei centri circoscritti (fig. 9). Immaginiamo ora una serie di sfere **T**, **T'**, **T''** … tangenti alle tre sfere date per identificare due luoghi geometrici:

- la curva **c** descritta, sulla superficie delle sfere date, dai punti di contatto, e
- la curva **i** descritta, nello spazio, dai centri delle sfere tangenti.

19 J.N.P. Hachette, *Traité* cit. p. 183: «Trouver le centre et le rayon d'une sphère tangente à quatre sphères donne de grandeur et de position».



Vediamo come costruire le sfere **T** senza conoscere ancora le curve **i** e **c** suddette. Sappiamo che quando due sfere si toccano, la distanza dai loro centri è uguale alla somma o alla differenza dei loro raggi. Adesso **T** è la sfera tangente di raggio **t** che vogliamo cercare. È intuitivo che il centro della sfera **T** è su una delle sfere concentriche ad **A** di raggio rispettivamente **t** + **a** e **t** – **a**. Per la stessa ragione è su una delle due sfere concentriche a **B** di raggio **t** + **b** e **t** – **b**. Lo stesso vale per la sfera **C.** Di conseguenza il centro della sfera **T** è il punto comune a tre delle sei sfere **A′**, **A″**, **B′**, **B″**, **C′**, **C″**. Ora calcolando le possibili combinazioni, escludendo quelle con sfere concentriche come **A** e **A′**, si hanno le otto soluzioni qui elencate:

10 - Sappiamo che quando due sfere si toccano, la distanza dai loro centri è uguale alla somma o alla differenza dei loro raggi. Una sfera T tangente sarà data dall'intersezione delle sfere concentriche alle sfere date

1 - **A′B′C′**
2 - **A′B′C″**
3 - **A′B″C′**
4 - **A′B″C″**
5 - **A″B′C′**
6 - **A″B′C′**
7 - **A″B″C′**
8 - **A″B″C″**.

Ebbene, ammettendo che si verifichino le intersezioni, ognuna delle otto combinazioni dovrebbe dare come intersezione due soli punti - nell'esempio è illustrata una possibile combinazione di **A′B′C′** (fig. 10) - se ne deduce che, sempre in linea generale, esistono 16 punti, ciascuno dei quali può essere il centro di una sfera tangente **T** alle tre sfere date. Adesso immaginiamo di far variare il raggio della sfera **T**, il centro della sfera **T** prenderà diverse infinite posizioni, corrispondenti al valore del raggio **t**. Anche i punti di contatto della sfera tangente con le tre sfere date cambieranno continuamente.

La curva **i** - i centri delle sfere tangenti a tre sfere date hanno come luogo geometrico una curva piana che è una conica - gode di questa proprietà: le distanze di un punto qualsiasi di questa dai centri delle sfere fisse differiscono fra loro di una quantità costante indipendente dal raggio della sfera **T**. Chiamiamo queste distanze **d**, **d′**, **d″** allora le quantità **d** – **d′**, **d′** – **d″**, **d″** – **d** sono costanti. Per dimostrarlo basta prendere una delle qualsiasi combinazioni, per esempio la **1 A′B′C′** e notare che:

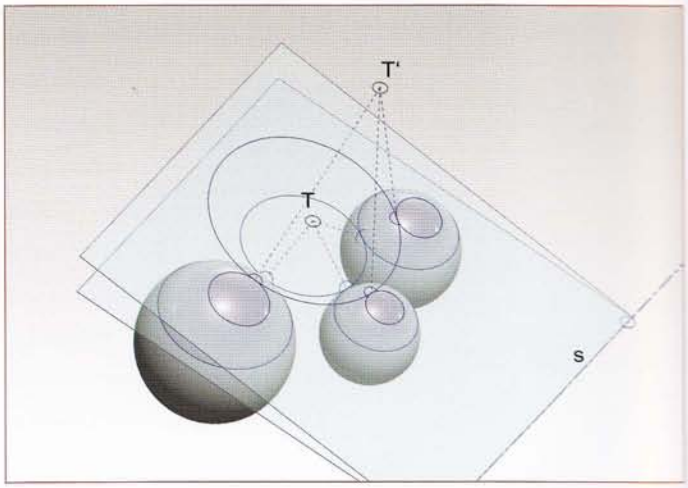
d = **t** + **a**   **d′** = **t** + **b**   **d″** = **t** + **c**

calcolando le differenze abbiamo:

1	d = t + a	d’ = t + b	d’’ = t + c
2	d = t + a	d’ = t + b	d’’ = t - c
3	d = t + a	d’ = t - b	d’’ = t + c
4	d = t + a	d’ = t - b	d’’ = t - c
5	d = t - a	d’ = t + b	d’’ = t + c
6	d = t - a	d’ = t + b	d’’ = t - c
7	d = t - a	d’ = t - b	d’’ = t + c
8	d = t - a	d’ = t - b	d’’ = t - c

$\mathbf{d - d' = a - b}$; $\mathbf{d' - d'' = b - c}$ e infine $\mathbf{d'' - d = c - a}$.

Se osserviamo la tabella ci rendiamo conto che il primo e l’ultimo sistema hanno lo stesso valore assoluto, come il 2 e il 7, il 3 e il 6, e infine il 4 e il 5. Dunque i centri di tutte le sfere che possono toccare tre sfere fisse, e che appartengono a otto serie differenti, sono distribuiti su quattro curve.

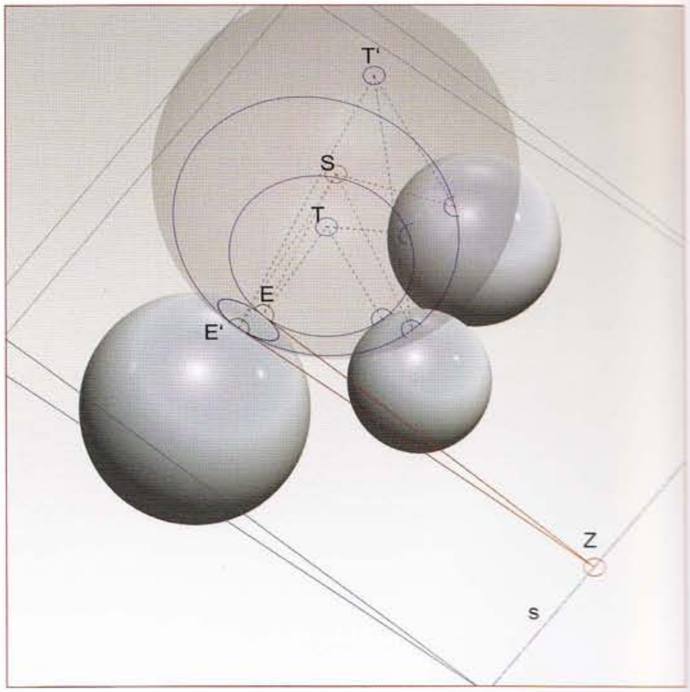


11 - Hachette seziona le tre sfere date con due piani passanti per la retta s. Ogni piano individua una possibile sfera tangente di centro T

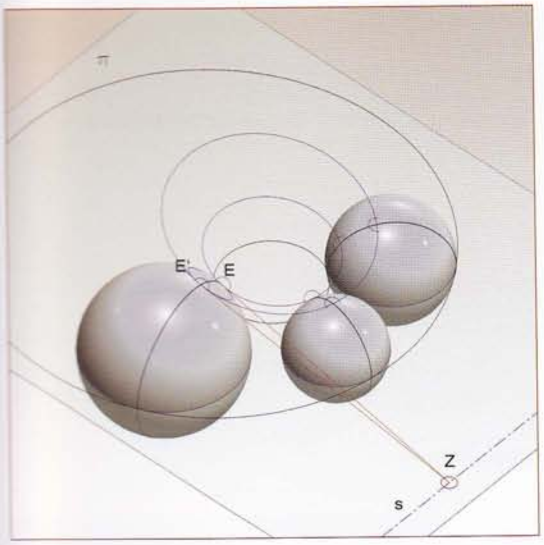
Dobbiamo dimostrare che queste quattro curve **i** sono piane e che i loro piani sono perpendicolari alle quattro rette - **s**, **s′**, **s″**, **s‴** - che contengono i centri dei coni tangenti. Inoltre dobbiamo dimostrare l’esistenza dei cerchi **c**.

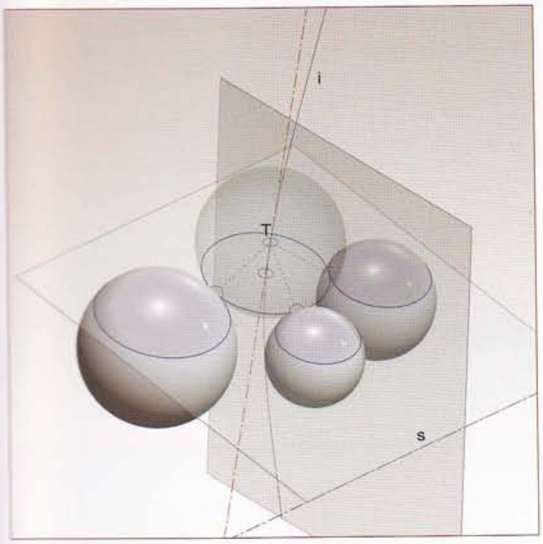
Per fare questo consideriamo le otto serie di sfere che possono toccare tre sfere fisse e prendiamo per esempio la sfera che tocca le sfere fisse esteriormente (fig. 10). Una qualunque di queste sfere sarà toccata dalle tre sfere fisse in tre punti di tangenza.

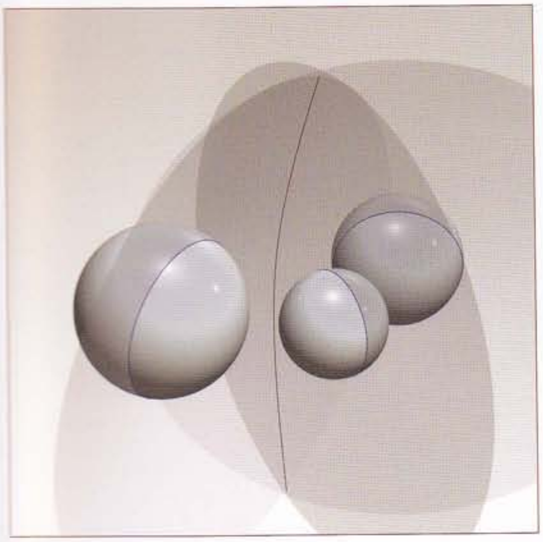
Per compiere questa indagine, Hachette seziona le tre sfere date con due piani passanti per la retta **s** e osserva quanto segue. I due piani tagliano le tre sfere secondo tre cerchi ciascuno. Ognuna delle due terne di cerchi ammette, nel piano cui appartiene, un cerchio tangente, il quale, a sua volta, identifica una delle sfere **T** tangenti alle sfere date (fig. 11). Questi due cerchi tangenti, individuano una sfera **S**, la quale gode delle seguenti proprietà (fig. 12): seca le sfere tangenti alle sfere date nei medesimi cerchi che la individuano; e seca le sfere date secondo cerchi tangenti ai primi, formando così una configurazione di Kasner, si veda in proposito il saggio di Leonardo Baglioni.



12 - I due cerchi tangenti, individuano una sfera S, la quale gode delle seguenti proprietà: seca le sfere tangenti alle sfere date nei medesimi cerchi che la individuano; e seca le sfere date secondo cerchi tangenti ai primi, formando così una configurazione di Kasner







Siano **E** e **E'** due dei punti di contatto, quelli relativi alla sfera **A**: le tangenti comuni ai tre cerchi nei punti suddetti si incontrano in un punto **Z** della retta **s**, infatti queste tangenti sono le rette intersezione dei due piani condotti per **s** a tagliare le sfere date con il piano individuato dal cerchio comune ad **S** e **A** (fig. 12). Evidentemente, il punto **Z** è comune a tutte le sfere tangenti la sfera **A** e poiché da esso possono essere condotte tutte le rette tangenti ad **A**, resta dimostrato quanto segue: il luogo geometrico **c** dei punti di contatto delle sfere tangenti a tre date, su ciascuna di esse, è un arco di cerchio; questo cerchio **c** è il contorno apparente di ciascuna delle sfere vista dal punto **Z** che le compete e, come tale, può essere facilmente costruito, inoltre è ortogonale al piano **π** passante per le tre sfere date. Infine il cerchio **c** ha come punti di contatto con il piano **π**, i due punti di contatto dei due cerchi tangenti **AiBiCi** e **AeBeCe** alle circonferenze massime delle tre sfere (fig. 13).

13 - Il luogo geometrico c dei punti di contatto delle sfere tangenti a tre date, su ciascuna di esse, è un arco di cerchio

Consideriamo ora le perpendicolari condotte nel centro dei due cerchi che abbiamo costruito, tagliando le sfere date con piani uscenti dalla retta **s** (fig. 14). Queste rette passano per i centri delle sfere **T** tangenti e, al tempo stesso, giacciono nel piano **α** della sezione retta del diedro spazzato dai piani di sezione che possono essere condotti per **s**. Queste rette sono le tangenti alla curva **i**, formata dai centri delle sfere tangenti **T**. Resta così dimostrato che il luogo geometrico dei punti che sono centri delle sfere **T** è una entità geometrica piana.

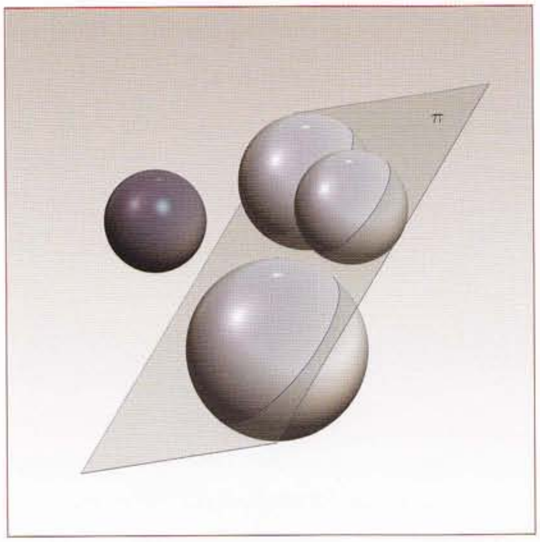
14 - Il luogo geometrico i descritto, nello spazio, dai centri delle sfere tangenti è una curva piana giacente su un piano ortogonale al piano passante per i centri delle tre sfere date

Ma ogni sfera tangente **T** ha in comune, con la sfera che tocca, il raggio che passa per il punto di contatto e dunque il centro di tale sfera deve trovarsi sul cono **Γ** che ha per vertice il centro della sfera considerata e per direttrice il cerchio **c** luogo geometrico dei punti di contatto (fig. 15). Se la linea di contatto di ciascuna delle tre sfere date con la sfera tangente è un cerchio, se ne deduce che la curva descritta dal centro della sfera tangente è comune ai tre coni retti che hanno per vertice i centri delle sfere fisse e per base i cerchi di contatto. Se ne conclude che la curva **i**, luogo geometrico dei centri delle sfere tangenti a tre sfere date è una sezione conica. Hachette quindi dimostra che:

- la curva **c** descritta, sulla superficie delle sfere date, dai punti di contatto con le sfere tangenti è un cerchio;

- la curva **i** descritta, nello spazio, dai centri delle sfere tangenti è una conica.

15 - Il luogo geometrico i descritto, nello spazio, dai centri delle sfere tangenti è una conica, perché è l'intersezione di tre coni retti



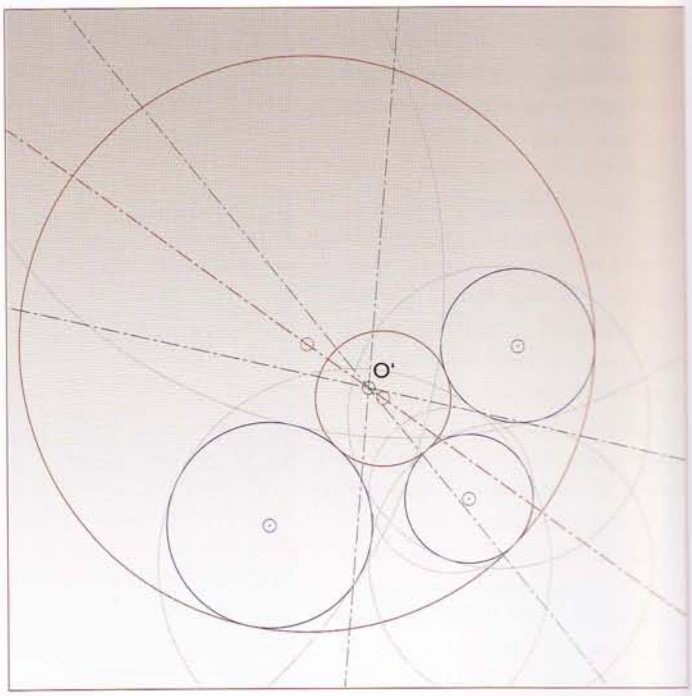
16 - Come trovare una sfera tangente ad altre quattro, date, grazie alle sezioni di un cono retto (metodo Hachette). Individuazione del piano π passante per i centri di tre sfere A, B, C

Vediamo ora come sia possibile costruire una sfera tangente ad altre quattro, date, grazie alle sezioni di un cono retto, con il metodo di Hachette.

Vorrei ricordare la questione inizialmente esposta. La critica di Gaultier nasceva dal fatto che Hachette, non potendo compiere la verifica sperimentale delle proprie teorie, era stato indotto a ritenere erroneamente che le soluzioni del problema fossero trentadue[20]. Ma vediamo perché: ciascuno dei quattro cerchi **c** sulla sfera **A** ha due punti di contatto con i cerchi massimi passanti per i centri delle tre sfere **A**, **B**, **C**. Ne risultano otto punti che sono anche i punti di contatto con le circonferenze delle otto soluzioni possibili nel piano **A**, **B**, **C**. Ora date quattro sfere possiamo combinarle tre a tre e trovare, in tutto, quattro combinazioni di cerchi **c.** Adesso consideriamo, solo per due combinazioni, i cerchi **c** sulla sfera **A**. I quattro cerchi **c** di un sistema saranno tagliati dagli altri quattro cerchi **c** dell'altro sistema. Le intersezioni di queste curve danno trentadue punti. Se Hachette avesse potuto disegnare le soluzioni, si sarebbe accorto dell'errore e cioè che solo sedici di questi punti sono i punti di contatto validi. Egli, però, si accorse dello sbaglio solo grazie alla sperimentazione di Gaultier e questo lo spinse ad esporre i ragionamenti suddetti[21]. Purtroppo, però, gli è sempre mancata la verifica sperimentale delle proprie teorie. Abbiamo, almeno in parte, colmato questa lacuna. Adesso non resta che mostrare come Hachette avrebbe potuto risolvere il problema utilizzando il laboratorio virtuale della geometria descrittiva.

[20] L. Gaultier de Tours, *Mémoire* cit., p. 12: «Ces géometres se sont bornés à constater l'existence de ces courbe, ce qui suffisait, en effet, pour arriver aux conclusions suivantes qu'ils en ont déduites [...]».

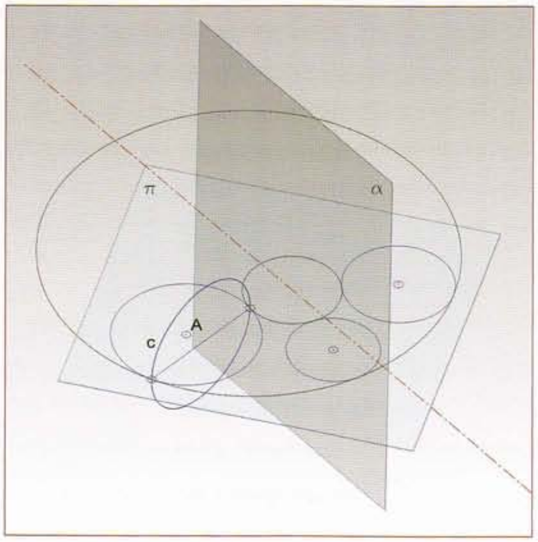
[21] J. N. P. Hachette, *Mémoire sur le contact des spheres*, in «Correspondance sur l'Ecole Imperiale Polytechnique», (1808-1827), pp. 17-28



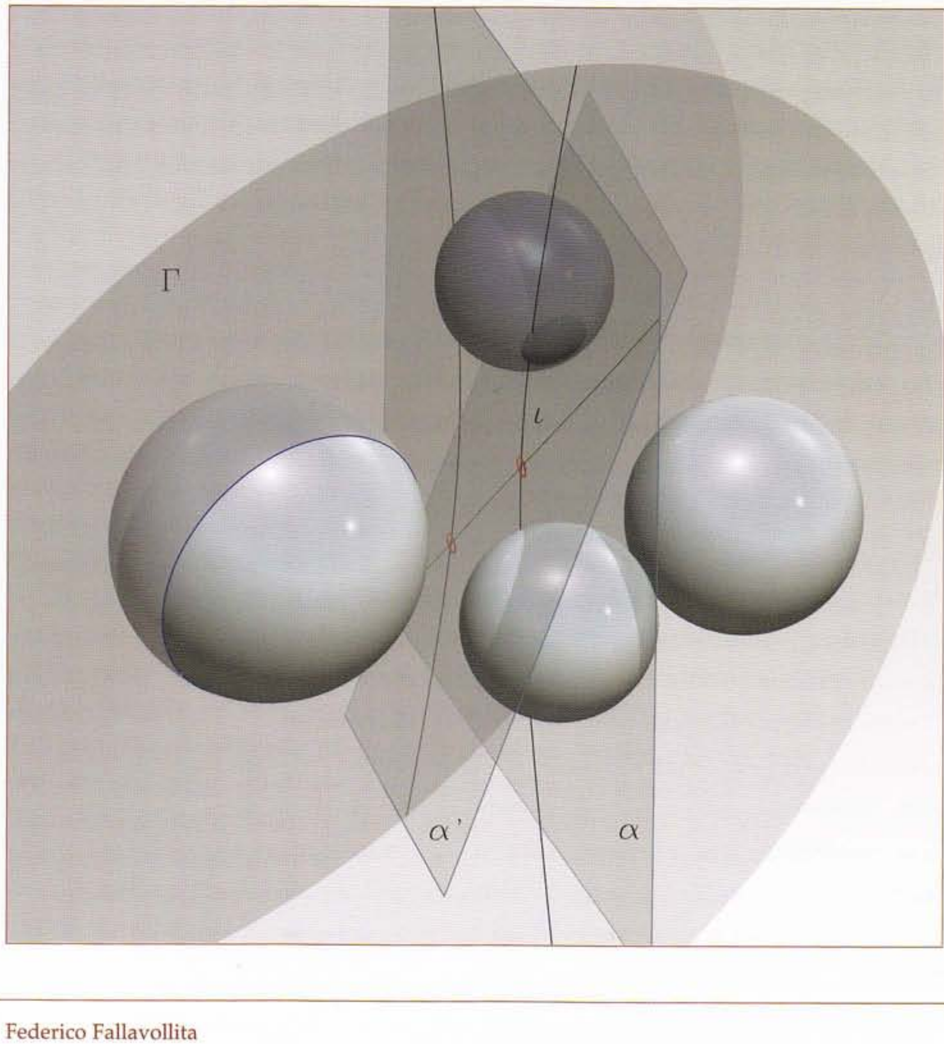
17 - Le soluzioni del Problema di Apollonio nel piano sono otto e i centri degli otto cerchi individuano a coppie quattro rette, che passano tutte per un medesimo punto O'

Qui di seguito, è descritta, passo dopo passo, la costruzione di una sfera tangente ad altre quattro, date, grazie alle sezioni di un cono retto. In particolare verranno costruite la sfera **AiBiCiDi** e la sfera **AeBeCeDe**.

Per prima cosa consideriamo il piano **π** che passa per tre centri qualsiasi di tre sfere, per esempio i centri **A**, **B**, **C** (fig. 16). Il piano **π** taglia le tre sfere secondo tre circonferenze massime **A**, **B**, **C** (rispettivamente dalla più grande alla più piccola). Costruiamo ora i due cerchi tangenti **AiBiCi** e **AeBeCe** alle tre circonferenze massime[22]. Ricordo che le soluzioni sono otto e che i centri degli otto cerchi individuano a coppie quattro rette, che passano tutte per un medesimo punto **O'** (fig. 17). Consideriamo, per ora, solo la retta che unisce i centri delle due soluzioni suddette. Questa retta individua un piano α ortogonale al piano **π** di riferimento (fig. 18).

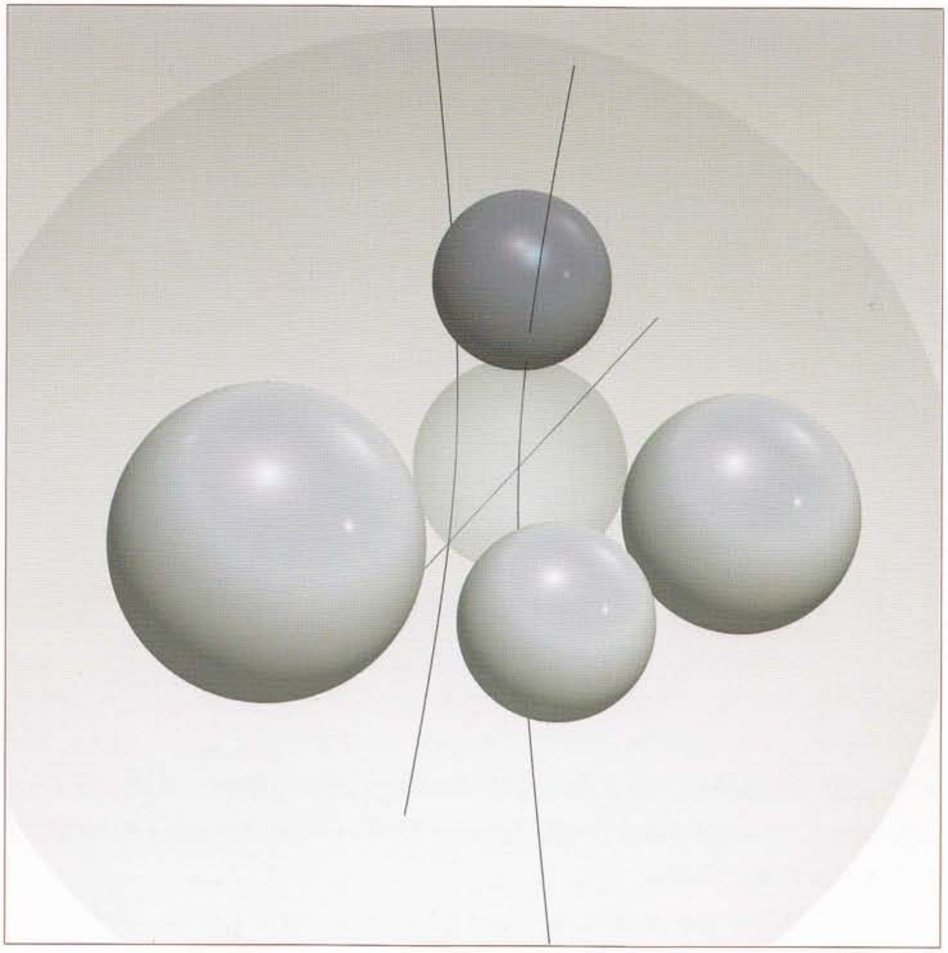


18 - Come trovare una sfera tangente ad altre quattro, date, grazie alle sezioni di un cono retto (metodo Hachette). I centri delle due soluzioni AiBiCi e AeBeCe individuano una retta. Questa retta individua un piano α ortogonale al piano π di riferimento (luogo geometrico dei centri delle sfere tangenti AiBiCi e AeBeCe)



19 - Come trovare una sfera tangente ad altre quattro, date, grazie alle sezioni di un cono retto (metodo Hachette). L'intersezione del cono retto Γ e dei due piani α e α' dà i centri delle due soluzioni cercate

[22] Per trovare i cerchi tangenti in un modellatore N.U.R.B.S., come thinkdesign, basta tracciare il cerchio per tre punti utilizzando lo snap tangente. Si ribadisce qui la validità nell'utilizzare questi strumenti perché non sminuiscono il valore scientifico dell'esperimento in quanto sono la manifestazione di concetti geometrici validi. Il fine di questo studio è anche quello di mettere in luce come il laboratorio virtuale possa essere uno strumento efficace e agile per accompagnare il ragionamento geometrico, e diventi in alcuni casi come questo, uno strumento indispensabile per la sperimentazione e la riflessione geometrica spaziale. La soluzione del problema di Apollonio nel piano è rimasta irrisolta per quasi duemila anni. Oggi con un modellatore digitale possiamo trovare le soluzioni automaticamente. Questo fatto però non ci esime dallo studiare il significato geometrico della soluzione anche nella loro prospettiva storica. Questo studio è stato fatto per esempio prendendo in considerazioni le soluzioni di François Viète (Fontenay-le-Comte, Poitou, Francia, 13 dicembre 1540 - Parigi, 13 dicembre 1603) e Adriaan van Roomen (29 September 1561 - 4 May 1615).



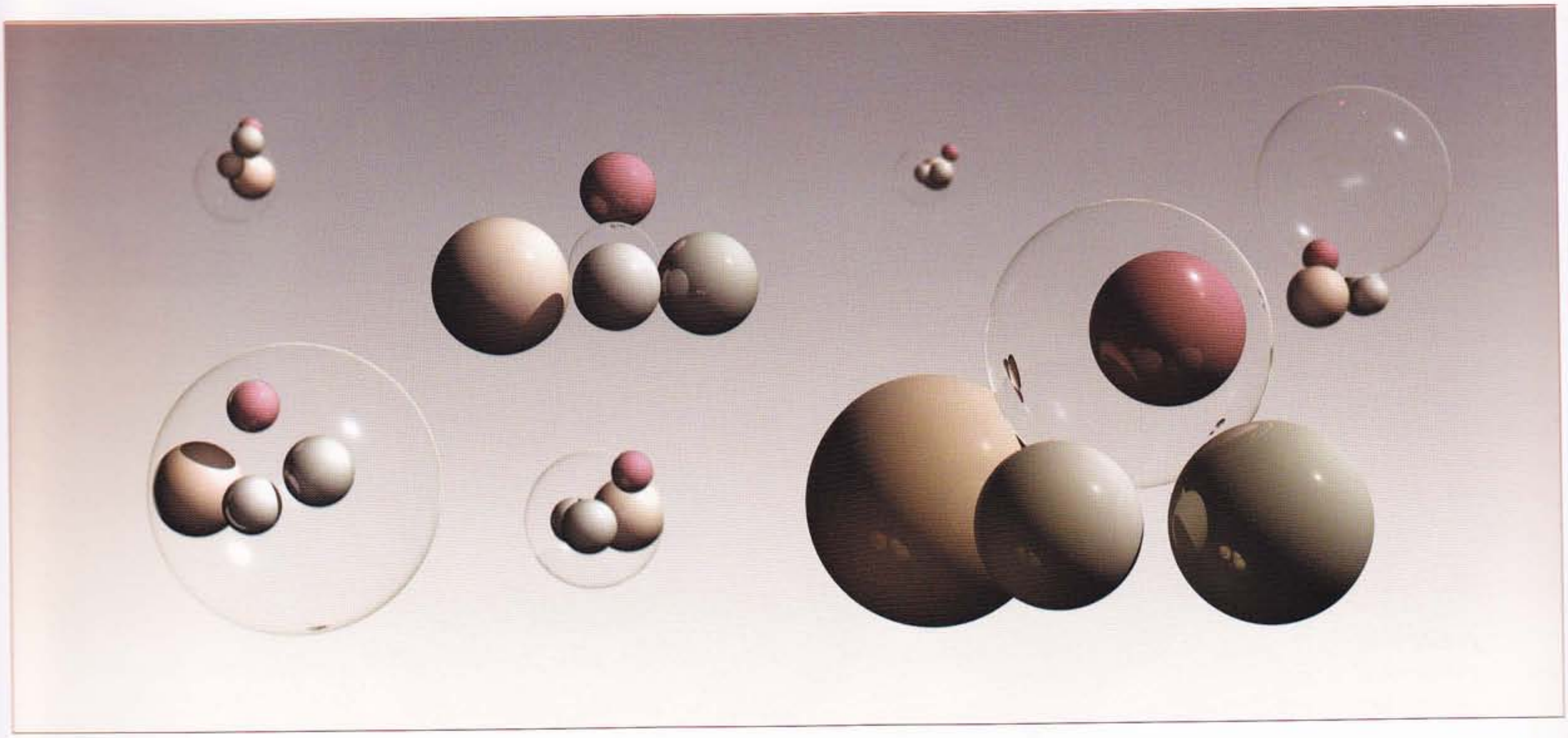
20 - Come trovare una sfera tangente ad altre quattro, date, grazie alle sezioni di un cono retto (metodo Hachette). Rappresentazione delle due sfere tangenti AiBiCiDi e AeBeCeDe

Sappiamo, ora, che i cerchi tangenti **AiBiCi** e **AeBeCe** toccano la circonferenza **A** in due punti (fig. 18). Per questi due punti facciamo passare una corda. Questa corda è il diametro di un cerchio **c** perpendicolare al piano **π** (luogo geometrico dei punti di contatto della sfera **A** con le sfere tangenti alle tre sfere **A,B,C).**· Ora, se disegniamo, il cono **Γ** che ha come vertice il centro della sfera **A** e come base la circonferenza **c**, abbiamo un cono retto a due falde (fig. 19).

Ripetiamo la medesima costruzione per un altro piano del tetraedro individuato dai centri **A,B,C,D**, delle quattro sfere, nell'esempio il piano π' (**A,B,D**). Abbiamo perciò un altro piano **α'** (fig. 19).

Con semplici passaggi abbiamo individuato un cono retto **Γ** e due piani **α** e **α'.** L'intersezione di questi tre enti geometrici dà i centri delle due soluzioni cercate.

Bisogna, per prima cosa, trovare l'intersezione del cono **Γ** con il piano **α** (fig. 19). Il risultato, nel caso generico che stiamo esaminando, è un'iperbole **i**. Questa iperbole **i** è il luogo geometrico dei centri delle sfere tangenti **AiBiCi** e **AeBeCe**. Ricordiamo che le sfere tangenti a tre date sono infinite, perché, per individuare una sfera sono necessarie quattro condizioni. Ora, se intersechiamo il piano



21 - *Particolare rappresentazione dell'esempio studiato del Problema di Apollonio nello spazio*

α' - luogo geometrico dei centri delle sfere tangenti **AiBiDi** e **AeBeDe** - con l'iperbole **i**, otteniamo due punti che sono i centri delle due sfere **AiBiCiDi** e **AeBeCeDe** (figg. 19, 20).

Trovare le altre quattordici soluzioni è semplice: basta cercare l'intersezione fra il cono e i due piani corrispondente alla combinazione esaminata. I coni Γ e i piani α e α' sono rispettivamente quattro. Per capire quale cono e quali piani utilizzare basta seguire il ragionamento anzidetto. Si ricorda che non è sempre possibile trovare le sedici soluzioni, perché alcune di queste possono non esistere. Questo avviene, per esempio, quando i piani non intersecano l'iperbole sezione del cono[23]. L'unico modo per capirlo è risolvere il sistema per via sintetica come indicato[24].

Come ho detto in principio, le considerazioni svolte in questo studio hanno un intento, che è quello di descrivere le varie soluzioni che, negli studi dell'Ecole Polytechnique, sono state date al problema di Apollonio nello spazio. Vorrei far notare come il significato delle iperboli descritte nel saggio di Riccardo Migliari, venga chiarito dalle considerazioni esposte. In questo quadro, il disegno geometrico è da considerarsi, prima di tutto, uno strumento della logica e la rappresentazione non è più soltanto un mezzo per creare immagini, ma è, soprattutto, uno strumento di invenzione e di scoperta (fig. 21).

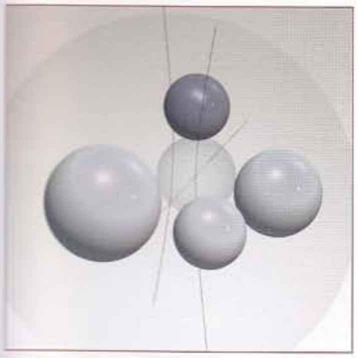
[23] Può capitare che l'intersezione con l'iperbole sezione del cono dia solamente un punto e non due.

[24] L. Gaultier de Tours, *Mémoire* cit., p. 207: «Nous remarquerons que ce probléme a constamment seize solutions, lorsque les sphères données ont une sphère rad. simp. comune, [...]». Gaultier afferma che il problema ha sempre sedici soluzioni quando le quattro sfere date ammettono una sfera radicale semplice comune.

have had the same effect as Galileo's telescope: a limitation, indeed a serious limitation, to analysis and comprehension of the problem. In this same volume another two brief treatises are dedicated to Gaultier and Kasner. But, once the experimental value of geometrical drawing has been ascertained, also through these studies on past works, it is necessary to draw the proper conclusions with regard to the present. Descriptive geometry, with methods and techniques now enhanced by digital representation, is at last in a position to resume its scientific development, first by recovering possession of wide-ranging literature, which has been neglected for years, then to propose new and stronger solutions to the problems of the description of forms and new studies on their geometric properties.

Si nous reprenons la comparaison avec la physique, nous pouvons dire que les méthodes qui n'étaient pas encore mûres et les techniques graphiques encore incertaines des chercheurs qui affrontèrent à l'époque le problème d'Apollonio ont eu un effet analogue à celui de la lunette astronomique de Galilée, une limite aussi grave à l'analyse et à la compréhension du problème. Dans ce même volume, deux autres brefs essais sont dédiés précisément à la lecture de Gaultier et de Kasner. Mais, une fois vérifiée la valeur expérimentale du dessin en géométrie, ainsi qu'à travers ces enquêtes sur les textes du passé, il faut extraire les conclusions voulues concernant le présent. La géométrie descriptive aujourd'hui, enrichie par les méthodes et les techniques de la représentation digitale est en état finalement de reprendre son propre développement scientifique, en se réappropriant auparavant une littérature de grand souffle, négligée depuis des années, pour proposer ensuite des solutions neuves et plus puissantes aux problèmes de la description des formes et de nouvelles enquêtes sur leurs propriétés géométriques.

Federico Fallavollita



Extension of the Apollonian problem in space and the Ecole Polytechnique

Two possible solutions to the Apollonian problem in space are described in this article. The idea came from some important considerations made, around 1710, at the Ecole Polytechnique in Paris. The method of finding a circle tangent to another four appears to have been of particular interest to researchers of the time. More specifically, they examined the Traite de géométrie descriptive (Paris 1828) by Jean Nicolas Pierre Hachette (1769 – 1834) and Mèmoire (le 15 Juin 1812, Journal de l'école polytechnique, XVI, 124 – 214) by Louis Gaultier (1776 – 1845). Both had been students and later professors at the school where Gaspard Monge (1746 – 1818) taught.

Their main objectives, pursued through experimentation with geometrical constructions in the virtual laboratory of descriptive geometry, in other words, by digital representation, are:

- to describe the construction of a circle tangent to another four given circles, using ruler and compass (Gaultier method);

- to describe the construction of a circle tangent to another four given circles, through the sections of a right cone (Hachette method);

- to illustrate this solution representing Hachette's considerations;

- lastly, to highlight how these considerations are related to the solution proposed by Riccardo Migliari in this book, inspired by analyses made by Adriaan van Roomen (1561 – 1615) and, with Kasner's illustrated study, again in this book, by Leonardo Baglioni.

This work comes into the context of the renewal of descriptive geometry, presently being promoted by the Roman school.

Digital representation offers the possibility of reaching a level of visual evidence hitherto unattainable and, through this evidence,

L'extension du problème d'Apollonio dans l'espace et l'Ecole Polytechnique

Dans cet article deux solutions possibles du problème d'Apollonio dans l'espace sont décrites. L'idée repose sur quelques considérations importantes faites autour de 1810, à l'Ecole Polytechnique de Paris. La façon de trouver une sphère tangente à quatre autres paraît avoir particulièrement intéressé les chercheurs de l'époque. De ce point de vue spécifique, ont été examinés le Traité de géométrie descriptive (Paris 1828) de Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834) et le Mémoire (15 Juin 1812, Journal de l'Ecole Polytechnique, XVI, 124 - 214) de Louis Gaultier (1776-1845). Tous deux ont été élèves puis professeurs dans cette même école où enseigna Gaspard Monge (1746-1818).

Les objectifs principaux que l'on veut poursuivre, à travers l'expérimentation des constructions géométriques au laboratoire virtuel de la géométrie descriptive, au moyen, à savoir, de la représentation digitale sont :

Décrire la construction d'une sphère tangente aux quatre autres, donnée avec la règle et le compas (par la méthode de Gaultier)

Décrire la construction d'une sphère tangente aux quatre autres, donnée à travers les sections d'un cône droit (par la méthode de Hachette)

Illustrer de telles solutions en représentant les considérations de hachette.

Enfin, mettre en lumière comment ces considerations sont en relation avec la solution proposée par Riccardo Migliari dans ce volume, inspirée des analyses d'Adriaan Van Roomen (1561-1615) et avec l'étude de Kasner illustrée, toujours dans ce volume, de Leonardo Baglioni.

Ce travail se place dans les limites du renouvellement de la géométrie descriptive actuellement mise en œuvre par l'Ecole Romaine.

References

1. BAGLIONI, Leonardo. Edward Kasner: il signore degli anelli. Il problema di Apollonio nello spazio: il caso delle circonferenze a diversa giacitura. In Ikhnos, Analisi grafica e storica della rappresentazione. Lombardi, Siracusa. 2008.
2. GAULTIER DE TOURS, Louis. Mémoire, Sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle determine par trios conditions, et une Sphère dterminée par quattre conditions. Lu à la première Classe de L'Institut, le 15 Juin 1812, *Journal de L'École polytechnique*, XVI, pp. 124-214. 1812.
3. HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Traité de géométrie déscriptive*. Paris: Corby, 1822, pp.283-286.
4. HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Rapport fait à la classe des Sciences Physique et Mathématiques de l'Institut [...]. In Correspondance sur l' École Royale Polytechnique, à l'usage des élèves de cette École, volume III*. Paris: Imprimerie de M.me V. Courcier, 1816, pp. 234-237.
5. MIGLIARI, Riccardo. *Rappresentazione come sperimentazione*. In Ikhnos, Analisi grafica e storica della rappresentazione. Lombardi, Siracusa. 2008.
6. VAN ROOMEN, Adrian. *Problema Apolloniacum, Adrianum romanum constructum*. Wirceburgi. 1956.
7. VIÈTE, François. *Apollonius Gallus seu, Exsuscitata Apollonii Pergaei peri epafwn Geometria, Ad V. C. A. R. Belgam*. Parigi. 1600.