

# Costruzioni relative al cerchio

*Federico Fallavollita*

## Abstract

Costruzioni relative al cerchio: costruzione del cerchio date tre condizioni (problema di Apollonio); cerchio per tre punti distinti e non allineati; cerchi che passano per due punti e sono tangenti a una retta; cerchi che passano per un punto e sono tangenti a due rette date; cerchi tangenti a tre rette date; cerchi che passano per due punti e sono tangenti a una circonferenza; cerchi per un punto dato, tangenti a una retta e a una circonferenza pure assegnate; cerchi per un punto dato, tangenti a due circonferenze pure assegnate; cerchi tangenti a due rette date e a una circonferenza pure assegnata; cerchi tangenti a una retta data e a due circonferenze, pure assegnate; cerchi tangenti a tre circonferenze date; costruzione del cerchio inscritto in un triangolo; costruzione del cerchio circoscritto a un triangolo; costruzione della retta  $p$  polare del punto  $P$  rispetto al cerchio; costruzione del punto  $P$  detto polo della retta  $p$  rispetto al cerchio; costruzione del triangolo polare rispetto a un cerchio; costruzione del parallelogrammo inscritto nel cerchio, del parallelogrammo circoscritto al cerchio e di due suoi diametri coniugati; costruzione dell'ellisse dati una coppia di diametri coniugati; costruzione di un esagono semplice inscritto e circoscritto a un cerchio e rispettivamente della retta  $r$  di Pascal e del punto  $P$  di Brianchon; costruzione di un pentagono semplice inscritto in un cerchio, di un pentagono semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive; costruzione di un quadrangolo semplice inscritto in un cerchio, di un quadrangolo semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive; costruzione del triangolo semplice inscritto in un cerchio, di un triangolo semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive; costruzione della conica per cinque punti dati; costruzione della conica per cinque tangenti; costruzione della conica per quattro punti e la tangente in uno di essi; costruzione della conica per quattro tangenti e il punto di contatto in una di esse; dati cinque punti di una conica trovare un altro punto della conica; costruzione della conica dati due fasci prospettivi.

Riccardo Migliari

# **Geometria descrittiva**

Volume I

Metodi e costruzioni

*Contributi di*

Leonardo Baglioni, Laura Carlevaris, Andrea Casale, Stefano Cinti Luciani  
Marco De Angelis, Laura De Carlo, Anna De Santis, Federico Fallavollita  
Marco Fasolo, Marta Salvatore, Alberto Sdegno

**CittàStudi**  
EDIZIONI

Proprietà letteraria riservata  
© 2009 De Agostini Scuola SpA – Novara  
1ª edizione: maggio 2009  
*Printed in Italy*

Tutti i diritti riservati. Nessuna parte del materiale protetto da questo copyright potrà essere riprodotta in alcuna forma senza l'autorizzazione scritta dell'Editore.

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% del presente volume/fascicolo, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO – Corso di Porta Romana, 108 – 20122 Milano – e-mail: segreteria@aidro.org

*Stampa:* Stamperia Artistica Nazionale - Trofarello (TO)

---

Ristampe: 0 1    2 3    4 5    6 7    8 9  
Anno:    2009    2010    2011    2012    2013

# Indice

XI	<i>Gli autori</i>		
XIII	<i>Prefazione</i>		
<b>Parte prima – Metodi</b>			
5	<b>Capitolo 1 – Elementi di geometria proiettiva</b>		
	<i>di Riccardo Migliari</i>		
5	1.1 Gli enti geometrici fondamentali		
6	1.2 Convenzioni		
7	1.3 L'operazione di proiezione		
9	1.4 L'ampliamento proiettivo dello spazio euclideo		
12	1.5 Le forme geometriche fondamentali		
13	1.6 Le proprietà invarianti		
15	1.7 L'omografia		
17	1.8 L'omologia piana		
21	1.9 I casi particolari di omologia piana		
24	1.10 L'omologia solida		
26	<b>Capitolo 2 – Elementi di geometria solida</b>		
	<i>di Riccardo Migliari</i>		
26	2.1 Appartenenza		
27	2.2 Parallelismo		
28	2.3 Perpendicolarità		
30	2.4 Angoli		
31	2.5 Intersezioni		
34	<b>Capitolo 3 – Rappresentazione prospettica</b>		
	<i>di Andrea Casale</i>		
34	3.1 Genesi dell'immagine prospettica		
34	3.2 Rappresentazione degli enti fondamentali		
41	3.3 Condizioni di appartenenza, di parallelismo e di complanarità		
44	3.4 Le costruzioni fondamentali della prospettiva		
48	3.5 La soluzione dei problemi di misura		
62	3.6 Breve storia della prospettiva		
66	<b>Capitolo 4 – Rappresentazione in pianta e alzato</b>		
	<i>di Marco Fasolo</i>		
66	4.1 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali		
69	4.2 Rappresentazione di enti geometrici in posizione particolare		
73	4.3 Costruzioni elementari o fondamentali		
80	4.4 Costruzione di relazioni di appartenenza e posizione		
83	4.5 Costruzioni elementari relative alla perpendicolarità		
87	4.6 Misure elementari e costruzioni relative		
95	4.7 Costruzione di alcune figure elementari		
97	4.8 Rappresentazione di una schiera di cubi librati nello spazio		
97	4.9 Breve storia del metodo di rappresentazione in pianta e alzato		
108	<b>Capitolo 5 – Rappresentazione quotata</b>		
	<i>di Laura Carlevaris</i>		
108	5.1 Genesi della proiezione quotata		
109	5.2 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali		
116	5.3 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali in posizione particolare		
119	5.4 Costruzioni elementari o fondamentali		
128	5.5 Condizioni di appartenenza e parallelismo		
132	5.6 Problemi metrici fondamentali: misura e ortogonalità		
140	5.7 Rappresentazione di un tetto		

145	5.8	Rappresentazione delle superfici topografiche
148	5.9	Breve storia della rappresentazione quotata
153	<b>Capitolo 6 – Rappresentazione in prospettiva parallela (assonometria)</b>	
		<i>di Laura De Carlo</i>
153	6.1	Generalità
154	6.2	Proiezione parallela ortogonale
	6.2.1	Genesi spaziale della prospettiva parallela ortogonale, 154 –
	6.2.2	Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali, 156 –
	6.2.3	Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali in posizione particolare, 158 –
	6.2.4	Costruzioni elementari o fondamentali, 162 –
	6.2.5	Costruzione di relazioni di appartenenza e posizione, 166 –
	6.2.6	Costruzioni elementari relative alla perpendicolarità, 169 –
	6.2.7	Misure elementari e costruzioni relative, 175
182	6.3	Proiezione parallela obliqua
	6.3.1	Genesi spaziale della prospettiva parallela obliqua, 182 –
	6.3.2	Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali, 183 –
	6.3.3	Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali in posizione particolare, 186 –
	6.3.4	Costruzione di relazioni di appartenenza e posizione, 189 –
	6.3.5	Costruzioni elementari o fondamentali, 190 –
	6.3.6	Costruzioni elementari relative alla perpendicolarità, 191 –
	6.3.7	Misure elementari e costruzioni relative, 197
201	6.4	Breve storia della rappresentazione prospettica parallela
206	<b>Capitolo 7 – Rappresentazione matematica</b>	
		<i>di Stefano Cinti Luciani, Riccardo Migliari</i>
206	7.1	Premessa sui metodi di rappresentazione informatica
207	7.2	La rappresentazione matematica
213	7.3	Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali
216	7.4	Rappresentazione di enti geometrici in posizione particolare
220	7.5	Alcune costruzioni elementari
224	7.6	Breve storia della rappresentazione matematica
228	<b>Capitolo 8 – Rappresentazione numerica o poligonale</b>	
		<i>di Marco De Angelis, Riccardo Migliari, Alberto Sdegno</i>
228	8.1	Generalità
233	8.2	Rappresentazione di enti geometrici in posizione particolare
239	8.3	Alcune costruzioni elementari
245	8.4	Breve storia della rappresentazione numerica

## Parte seconda – Costruzioni

255	<b>Capitolo 1 – Costruzione di relazioni di appartenenza e posizione</b>	
		<i>di Riccardo Migliari</i>
255	1.1	Costruzione della retta orizzontale $r$ che appartiene a un piano generico e ha una data quota
255	1.2	Costruzione del punto $P$ intersezione di tre piani $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$ dati
256	1.3	Costruzione della retta $q$ che passa per un punto $P$ e si appoggia a due rette sghembe $r$ e $s$
256	1.4	Costruzione della retta $r$ che passa per un punto $P$ dato ed è parallela a un piano $\alpha$ dato (problema indeterminato)
256	1.5	Costruzione della retta orizzontale $r$ che passa per un punto $P$ dato ed è parallela a un piano $\alpha$ dato
257	1.6	Costruzione del piano che passa per un punto $P$ dato ed è parallelo a una retta $r$ data (problema indeterminato)
257	1.7	Costruzione del piano che passa per un punto $P$ dato ed è parallelo a un altro piano $\alpha$ , pure dato
258	1.8	Costruzione del piano che passa per un punto $P$ dato ed è parallelo a due rette sghembe $a$ e $b$ , date
258	1.9	Costruzione del piano che passa per una retta data $a$ ed è parallelo a un'altra retta $b$ , pure data
259	1.10	Costruzione della retta $r$ che si appoggia a due rette sghembe $a$ e $b$ , date, ed è parallela a un'altra retta $c$ , data
260	<b>Capitolo 2 – Costruzione di relazioni di perpendicolarità</b>	
		<i>di Riccardo Migliari</i>
260	2.1	Costruzione del piano $\gamma$ verticale che passa per un punto $P$ dato ed è perpendicolare a un altro piano $\alpha$ dato
260	2.2	Costruzione del piano $\gamma$ che passa per un punto $P$ dato ed è perpendicolare ad altri due piani $\alpha$ e $\beta$ , pure dati
261	2.3	Costruzione del piano $\gamma$ che passa per una retta $r$ data ed è perpendicolare a un altro piano $\alpha$ , pure dato
262	2.4	Costruzione della perpendicolare comune a due rette sghembe, $r$ e $s$ (retta di minima distanza)
264	<b>Capitolo 3 – Misure e costruzione di relazioni metriche</b>	
		<i>di Riccardo Migliari</i>
264	3.1	Misura della distanza di un punto $P$ da un piano $\alpha$

264	3.2	Misura della distanza di due piani $\alpha$ e $\beta$ , paralleli	276	4.3	Cerchi che passano per due punti e sono tangenti a una retta
264	3.3	Misura della distanza di un punto $P$ da una retta $r$ in posizione generica	278	4.4	Cerchi che passano per un punto e sono tangenti a due rette date
264	3.4	Misura della minima distanza di due rette sghembe, $r$ e $s$	279	4.5	Cerchi tangenti a tre rette date
264	3.5	Costruzione di un segmento di data lunghezza $AB$ che appartiene a una retta $r$ data	280	4.6	Cerchi che passano per due punti e sono tangenti a una circonferenza
265	3.6	Costruzione del luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti $P$ e $Q$ , dati	284	4.7	Cerchi per un punto dato, tangenti a una retta e a una circonferenza pure assegnate
265	3.7	Costruzione del luogo geometrico dei punti equidistanti da tre punti $A$ , $B$ e $C$ dati	286	4.8	Cerchi per un punto dato, tangenti a due circonferenze pure assegnate
266	3.8	Dati tre punti $A$ , $B$ e $C$ e un piano $\alpha$ , costruire il punto $D$ , equidistante dai tre punti e dal piano $\alpha$ dati	286	4.9	Cerchi tangenti a due rette date e a una circonferenza pure assegnata
267	3.9	Costruzione del punto $S$ equidistante da quattro punti $A$ , $B$ , $C$ e $D$ dati	287	4.10	Cerchi tangenti a una retta data e a due circonferenze, pure assegnate
268	3.10	Costruzione del luogo geometrico dei punti dello spazio che distano da un dato piano $\alpha$ , una misura assegnata mediante un segmento $AB$ , dato in una posizione qualsiasi	288	4.11	Cerchi tangenti a tre circonferenze date
268	3.11	Misura degli angoli $\Theta$ e $\Psi$ , supplementari, formati da due piani $\alpha$ e $\beta$ , assegnati	293	4.12	Costruzione del cerchio inscritto in un triangolo
269	3.12	Costruzione della retta $s$ che forma, con un'altra, $r$ , data in un piano $\alpha$ , un angolo $\varphi$ dato per mezzo di due rette incidenti $a$ e $b$	294	4.13	Costruzione del cerchio circoscritto a un triangolo
270	3.13	Costruzione della retta $r$ che ha una data proiezione geometricale $r_1$ e un dato angolo di pendenza, $\Psi$	295	4.14	Costruzione del cerchio tangente a due cerchi con diversa giacitura (configurazione di Kasner)
270	3.14	Costruzione della retta $r$ , che appartiene a un piano inclinato $\alpha$ dato, passa per un punto $P$ di $\alpha$ e ha un dato angolo di pendenza, $\Psi$	298	4.15	Costruzione della retta $p$ polare del punto $P$ rispetto al cerchio
271	3.15	Costruzione del piano $\beta$ che passa per una retta $r$ data in un piano $\alpha$ e forma con questo ultimo un dato angolo diedro $\Psi$	300	4.16	Costruzione del punto $P$ detto polo della retta $p$ rispetto al cerchio
272	3.16	Costruzione del piano che ha una data traccia geometricale e un dato angolo di pendio	301	4.17	Costruzione del triangolo polare rispetto a un cerchio
272	3.17	Costruzione di un piano $\alpha$ , di dato angolo di pendio, che passa per una retta $r$ data	302	4.18	Costruzione del parallelogrammo inscritto nel cerchio, del parallelogrammo circoscritto al cerchio e di due suoi diametri coniugati
274	<b>Capitolo 4 – Costruzioni relative al cerchio</b> <i>di Federico Fallaovollita</i>		303	4.19	Costruzione dell'ellisse dati una coppia di diametri coniugati
274	4.1	Costruzione del cerchio date tre condizioni (problema di Apollonio)	304	4.20	Costruzione di un esagono semplice inscritto e circoscritto a un cerchio e rispettivamente della retta $r$ di Pascal e del punto $P$ di Brianchon
275	4.2	Cerchio per tre punti distinti e non allineati	306	4.21	Costruzione di un pentagono semplice inscritto in un cerchio, di un pentagono semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive
			306	4.22	Costruzione di un quadrangolo semplice inscritto in un cerchio, di un quadrangolo semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive

307	4.23	Costruzione del triangolo semplice inscritto in un cerchio, di un triangolo semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive	336	7.14	Dati due piani tra loro perpendicolari e un punto esterno ad essi, costruire un terzo piano che passa per il punto dato e forma con entrambi i piani dati il medesimo angolo
307	4.24	Costruzione della conica per cinque punti dati	338	7.15	Dati due piani tra loro perpendicolari e una retta esterna ad essi, costruire un terzo piano che passa per la retta data e forma con entrambi i piani dati il medesimo angolo
310	4.25	Costruzione della conica per cinque tangenti	339	7.16	Dati tre piani costruire i piani bisettori dei due diedri formati dai primi due col terzo e relativa retta intersezione
311	4.26	Costruzione della conica per quattro punti e la tangente in uno di essi	339	7.17	Costruire i piani mediani delle facce di un triedro dato e la loro retta intersezione
312	4.27	Costruzione della conica per quattro tangenti e il punto di contatto in una di esse	340	7.18	Costruire un triedro rettangolo, conoscendo una delle facce del diedro retto e il diedro opposto alla faccia nota
313	4.28	Dati cinque punti di una conica trovare un altro punto della conica	341	7.19	Date due rette incidenti costruire il punto che dista da ciascuna e dal piano che esse individuano, quantità date
315	4.29	Costruzione della conica dati due fasci prospettivi	341	7.20	Costruire una piramide regolare data la base pentagonale e l'angolo diedro che le facce formano con la base
317	<b>Capitolo 5 – Divisione di un segmento e sezione aurea</b> <i>di Riccardo Migliari</i>		342	7.21	Costruire la piramide formata dai piani bisettori dei diedri formati dalle facce di una piramide con il piano orizzontale
321	<b>Capitolo 6 – Poligonali e poligoni</b> <i>di Riccardo Migliari</i>		343	7.22	Dato un tetraedro irregolare, costruire i punti di concorso dei due gruppi seguenti: 1. le tre rette che uniscono due a due i punti medi degli spigoli opposti; 2. le quattro rette che uniscono ciascuno dei vertici al baricentro della faccia opposta
323	<b>Capitolo 7 – Costruzione di angoli solidi</b> <i>di Leonardo Baglioni</i>		343	7.23	Dato un triangolo acutangolo, costruire la piramide trirettangola che lo ha per base
323	7.1	Definizioni	345	<b>Capitolo 8 – Costruzione di poliedri elementari</b> <i>di Riccardo Migliari</i>	
323	7.2	Teorema: ciascuna faccia di un triedro è più piccola della somma delle altre due	345	8.1	Poliedri
324	7.3	Teorema: la somma delle facce di un angoloide convesso è minore di quattro angoli retti	346	8.2	Tetraedro
324	7.4	Teorema: in un triedro la somma dei tre diedri è compresa tra due angoli retti e sei angoli retti	347	8.3	Esaedro
325	7.5	Teorema: in un triedro la differenza tra il più piccolo dei diedri e la somma degli altri due è minore di due angoli retti	347	8.4	Ottaedro
325	7.6	Costruire il piano bisettore di un diedro dato	347	8.5	Dodecaedro
326	7.7	Costruire il triedro date le tre facce	349	8.6	Icosaedro
327	7.8	Costruire il triedro date due facce e il diedro compreso	350	8.7	Sviluppi
328	7.9	Costruire il triedro date due facce e il diedro opposto a una di esse			
331	7.10	Costruire il triedro data una faccia e i due diedri adiacenti			
332	7.11	Costruire il triedro dati due diedri e una faccia opposta			
333	7.12	Costruire il triedro dati i tre diedri			
335	7.13	Ridurre un angolo all'orizzonte			

352	<b>Capitolo 9 – Parallelepipedi, prismi, piramidi e loro sezioni, intersezioni e sviluppi piani</b>	359	9.8 Costruzione della sezione quadrata di un parallelepipedo avente per base un parallelogramma
	<i>di Marta Salvatore</i>	361	9.9 Costruzione della sezione di una piramide con un piano in posizione generica e sviluppo nel piano
352	9.1 Prismi e piramidi	363	9.10 Costruzione della sezione di una piramide triangolare che taglia i tre spigoli secondo lo stesso angolo
352	9.2 Costruzione del parallelepipedo retto che ha per base un dato parallelogramma e altezza data	364	9.11 Costruzione della sezione di una piramide, avente per base un quadrilatero, tale che questa risulti un parallelogramma
353	9.3 Costruzione del parallelepipedo obliquo che ha per base il parallelogramma <b>ABCD</b> e per spigoli rette di data lunghezza <b>l</b> , parallele a una retta <b>r</b>	365	9.12 Costruzione dei punti di intersezione di una retta data con le facce di un poliedro dato
354	9.4 Costruzione del prisma retto che ha per base un dato poligono e altezza data e del prisma obliquo che ha per base un dato poligono e per spigoli rette di una data lunghezza <b>l</b> , parallele a una retta data <b>r</b>	367	9.13 Costruzione dell'intersezione di due poliedri dati nel caso della compenetrazione e dello sfaldamento e relativi sviluppi
354	9.5 Costruzione di una piramide data la base e il vertice	369	<i>Bibliografia</i>
356	9.6 Costruzione di una piramide triangolare date le lunghezze dei sei spigoli		<i>a cura di Anna De Santis</i>
357	9.7 Costruzione della sezione retta di un parallelepipedo e di un prisma obliqui e loro sviluppi nel piano	379	<i>Indice analitico</i>



# Gli autori

Questo libro è il risultato di un'ampia collaborazione di esperti con competenze diverse, provenienti dal mondo accademico, dell'istruzione, industriale e professionale, che si sono riconosciuti nel progetto di rinnovamento della geometria descrittiva ideato e coordinato da Riccardo Migliari:

**Leonardo Baglioni**, architetto, dottore di ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo presso la «Sapienza» Università di Roma. Si interessa ai problemi di rappresentazione per mezzo dei metodi grafici tradizionali e digitali, attualmente si sta occupando dello studio della discretizzazione delle superfici continue condotto nel metodo della rappresentazione matematica.

**Laura Carlevaris**, ricercatrice alla «Sapienza», Università di Roma, presso la Facoltà di Architettura «L. Quaroni», ove insegna Geometria Descrittiva e Rilievo dell'Architettura. Si interessa prevalentemente dei fondamenti scientifici della rappresentazione.

**Andrea Casale**, architetto, è professore associato alla «Sapienza» Università di Roma, presso la Facoltà di Architettura «L. Quaroni», e insegna nei Corsi di Laurea in Disegno Industriale, in Tecniche dell'Architettura e della Costruzione e nel Corso di Laurea specialistica in Disegno Industriale. Si occupa dei problemi inerenti la progettazione, la geometria, la percezione, con particolare attenzione per la geometria descrittiva, le

sue rappresentazioni, la sua storia e le sue applicazioni al rilievo diretto e strumentale.

**Stefano Cinti Luciani**, laureato in Ingegneria all'Università di Bologna, ha fondato, nel 1979, insieme ad altri soci, la CAD.LAB, ora Think3, protagonista in Italia e nel mondo nello sviluppo di prodotti CAD, nella quale copre oggi il ruolo di Vice President Product Quality. Dal 1988 collabora con il Politecnico di Milano alla Facoltà del Design come professore a contratto per il Laboratorio di grafica computerizzata. Ha scritto numerose pubblicazioni sull'argomento della progettazione assistita da calcolatore ed ha partecipato a convegni e tavole rotonde.

**Marco De Angelis**, architetto e disegnatore. Collabora con testate giornalistiche, Università e Accademie, svolgendo attività di ricerca e libera professione nel campo della rappresentazione digitale architettonica, con particolare riguardo, da alcuni anni, all'ambiente *real-time*.

**Laura De Carlo**, architetto, professore ordinario alla «Sapienza» Università di Roma, dove insegna Fondamenti e applicazioni di Geometria Descrittiva, alla Facoltà di Architettura «L. Quaroni». Oltre alle tematiche inerenti la Geometria descrittiva e la sua storia in rapporto alle tecnologie informatiche, si occupa di nuove strumentazioni per l'analisi dell'architettura e per il rilievo urbano.

**Anna De Santis**, dottore di Ricerca in Rilievo e Rappresentazione del Costruito, è docente di Discipline Geometriche e Architettoniche nella

scuola secondaria superiore. Dal 2003 è professore a contratto presso la Facoltà di Architettura «L. Quaroni» della «Sapienza» Università di Roma, nei corsi di Disegno, Geometria e Scienza della Rappresentazione presso i corsi di laurea in Disegno Industriale e Architettura degli Interni. Ha partecipato a ricerche sulla storia della Scienza della Rappresentazione.

**Federico Fallavollita**, dottore di ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo presso la «Sapienza» Università di Roma. Oltre ad avere collaborato come progettista a diversi concorsi internazionali d'architettura, svolge attività didattica e di ricerca nell'ambito della «Sapienza» Università di Roma. Si occupa, in generale, di problemi di rappresentazione e di rilievo dell'architettura. In particolare s'interessa del rinnovamento della Geometria descrittiva connesso all'uso degli strumenti informatici.

**Marco Fasolo**, professore associato alla «Sapienza», Università di Roma, ove insegna Disegno e Fondamenti e Applicazioni della Geometria descrittiva presso la Facoltà di Architettura «L. Quaroni», nel Corso di Laurea in Restauro e conservazione dei beni architettonici. È autore di numerose pubblicazioni che riguardano i temi della rappresentazione.

**Riccardo Migliari**, architetto, è professore ordina-

rio di Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva alla «Sapienza» Università di Roma ove insegna nella Facoltà di Architettura «L. Quaroni». Si interessa delle applicazioni del computer al progetto e alla rappresentazione dell'architettura dalla fine degli anni Sessanta e ha seguito l'evoluzione dei sistemi informatici fin dal loro primo apparire nel mondo accademico e professionale. È attualmente impegnato nel progetto di rinnovamento della disciplina di cui è titolare e ha dedicato a questo tema molte pubblicazioni, in parte consultabili sul sito: <http://www.migliari.it>.

**Marta Salvatore**, architetto, dottore di ricerca in Rilievo e Rappresentazione dell'Architettura e dell'Ambiente presso l'Università degli studi di Firenze. Indirizza la propria attività di ricerca allo studio della geometria descrittiva e dei contributi teorici che concorsero al suo fondamento. Si occupa allo stesso tempo dei metodi della rappresentazione digitale con particolare interesse per la rappresentazione matematica.

**Alberto Sdegno**, architetto, dottore di ricerca e ricercatore alla Università degli Studi di Trieste, presso la Facoltà di Architettura, dove tiene i corsi di Disegno e Disegno Digitale. È autore di varie pubblicazioni. Si occupa di ricerca sulle relazioni tra metodi tradizionali e strumenti digitali di disegno.

# Prefazione

La Geometria descrittiva, come ogni altra scienza, possiede un apparato teorico e si applica ad un vasto insieme di attività scientifiche e tecniche.

La Geometria descrittiva viene di norma utilizzata in tre momenti fondamentali dell'indagine scientifica, come del progetto. Il primo di questi momenti è la *visualizzazione* delle forme dello spazio a tre dimensioni, il secondo è la *costruzione* o elaborazione delle forme medesime, il terzo è l'*invenzione*, ovvero la scoperta di relazioni, proprietà, forme, prima ignote.

Nel corso dei secoli e fino a tutto il Novecento, la Geometria descrittiva si è servita dei semplici strumenti del disegno geometrico e tecnico, vale a dire la riga e il compasso. Ma, a partire dalla fine dello scorso secolo, a questi strumenti si sono aggiunti i sistemi informatici, che offrono la possibilità di tracciare, con accuratezza geometrica, non solo il cerchio e la retta, ma molte altre curve, e permettono, altresì, di collocare questi tracciati non solo sul foglio di carta, ma in uno spazio a tre dimensioni efficacemente simulato. L'introduzione di questi strumenti ha comportato, per la nostra scienza, un mutamento epocale: infatti, se da un lato il momento della *visualizzazione* è oggi assai meno impegnativo di quanto era un tempo, dall'altro il momento della *costruzione* si avvale di mezzi molto più potenti e, di conseguenza, il momento della *invenzione* si esprime in forme più libere, come ognuno di noi vede ogni giorno non solo nei più recenti edifici, ma

anche negli oggetti della produzione industriale come, ad esempio, le carrozzerie delle automobili e gli oggetti di arredo.

Per questi motivi, è oggi necessaria una ampia revisione dei contenuti e della struttura stessa della Geometria descrittiva tradizionale. Questo libro vuole essere un primo tentativo di organizzare la disciplina in un assetto adeguato ai tempi e persegue questo obiettivo adottando alcuni accorgimenti che non compaiono nella manualistica precedente.

Il primo di questi accorgimenti consiste nella introduzione di metodi di rappresentazione che si affiancano a quelli tradizionali e che derivano dalle tecniche digitali: il *metodo della rappresentazione matematica* e il *metodo della rappresentazione numerica o poligonale*.

Il secondo consiste in una rilettura del lascito della nostra scienza, e non solo quello di Gaspard Monge e della sua scuola, ma, più in generale, quello che viene dal passato, si pensi ad esempio, alla stereotomia e alla prospettiva, andando a ritroso nel tempo. Questo patrimonio di teorie, di idee, ma soprattutto di forme tridimensionali, trova una nuova vita nella genesi e nella visualizzazione digitale.

Il terzo accorgimento consiste nel ricercare, ove possibile, soluzioni più semplici e generali ai problemi che per secoli sono stati condizionati dalla necessità di costruire sul supporto cartaceo: si pensi, ad esempio, alla genesi delle rigate, al problema di Apollonio e a molti altri.

Infine, è doveroso ricordare l'importanza del lavoro di squadra in questo momento storico dello sviluppo della disciplina. In ogni ambito scientifico la collaborazione e il confronto tra ricercatori, a volte anche molto distanti non solo fisicamente, ma per formazione e competenze, ha dato i risultati migliori. Più che mai è necessaria oggi in un ambito che è soggetto a revisione, come si è detto, e perciò questo libro nasce dal concorso di molti Autori, alcuni anche assai giovani, e proprio per questo più agili nella esplorazione di nuove soluzioni.

Per la praticità della consultazione, questo manuale è diviso in due volumi.

Nel primo vengono trattati i *metodi di rappresentazione* e le *costruzioni*, nella nuova concezione alla quale ho fatto cenno. Poiché la caratteristica principale di un metodo di rappresentazione, in geometria descrittiva, è quella di essere indipendente dagli altri metodi e perciò di essere capace di risolvere autonomamente qualsiasi problema, si è pensato di verificare questa dote risolvendo i medesimi, fondamentali problemi in ognuno dei metodi trattati e, in particolare, anche nei metodi nati dalle tecniche digitali. Questo esercizio può apparire, in certi casi, puramente accademico, perché ogni metodo ha i suoi privilegiati campi di applicazione e non v'è ragione, nella pratica, di realizzare, ad esempio, la misura di una superficie utilizzando la prospettiva o lo studio percettivo di uno spazio interno per mezzo di due proiezioni ortogonali associate. Allo stesso modo, non v'è ragione di affrontare problemi metrici nella rappresentazione numerica o problemi percettivi in quella matematica. Ciò non di meno, era indispensabile verificare la possibilità di rappresentare compiutamente e ricostruire nello spazio le forme rappresentate in ciascuno dei suddetti metodi, proprio per poter convalidare quella proposta di ampliamento cui si è fatto cenno.

Nel secondo volume vengono invece trattate le tecniche digitali e le loro applicazioni, cominciando

con quelle più astratte, che riguardano lo studio delle curve e delle superfici e la verifica sperimentale delle loro proprietà, per approdare ad alcune delle applicazioni tecniche tradizionali.

È necessario, ancora, un chiarimento per ciò che riguarda i sistemi informatici, che permettono di *disegnare nello spazio* e che tanta importanza hanno nella evoluzione della geometria descrittiva. Allo stato dell'arte, questi sistemi non sono unificati. Anche se impiegano algoritmi noti, frutto dell'ingegno dei padri della computer grafica, i programmi dedicati alla rappresentazione digitale utilizzano ognuno interfacce diverse e persino una diversa terminologia, sicché, attualmente, è a malapena possibile distinguere i programmi che utilizzano prevalentemente la rappresentazione matematica e continua, cui si deve il controllo metrico degli oggetti rappresentati, da quelli che utilizzano prevalentemente la rappresentazione numerica e discreta, cui si deve il controllo formale degli stessi. In una classe a parte si possono invece raccogliere quei programmi che hanno una forte connotazione tecnica e che perciò sono indirizzati a specifici ambiti professionali. In questo quadro, ancora piuttosto confuso, ci è sembrato inopportuno privare il lettore di un riferimento certo alle tecniche digitali, come sarebbe stato se avessimo lasciato al discorso un carattere generale ed astratto. Abbiamo perciò selezionato, tra le innumerevoli applicazioni che il mercato offre, quelle che più ci sono sembrate vicine ad un ideale di generalità, nei due ambiti metodologici sopra citati. E per queste applicazioni, che sono quattro in tutto, abbiamo fornito in forma stenografica la descrizione e la collocazione dei comandi utilizzati nelle costruzioni che vengono illustrate<sup>1</sup>.

Questo punto di vista è diverso da quello di altre pubblicazioni, di cultura anglosassone, nelle quali si propone di imparare ad usare il computer attraverso la soluzione dei problemi della geometria de-

<sup>1</sup> In particolare, il software **ThinkDesign** è lo strumento principe della rappresentazione matematica trattata in questo libro. Questo programma può essere scaricato liberamente al seguente indirizzo: [http://www.migliari.it/download/td\\_2008.zip](http://www.migliari.it/download/td_2008.zip).

Docenti e studenti delle scuole e delle università possono richiedere la licenza d'uso gratuita a: <http://www.think3.com/it/contatti/contatti?frompg=educational> specificando, nel *form*, il titolo di questo libro. Al medesimo sito si può accedere anche attraverso la scheda del libro sul sito [www.utetuniversita.it](http://www.utetuniversita.it)

scrittiva. Qui è esattamente il contrario: si vuole insegnare la geometria descrittiva sfruttando le prestazioni del computer. Perché ciò che conta non è la produzione di un disegno, ma la produzione di una idea accurata e compiutamente definita dello spazio a tre dimensioni.

Desidero infine ringraziare i miei colleghi tutti,

non solo quelli che con grande impegno hanno dato vita a questo primo tentativo di rinnovare la geometria descrittiva, ma anche quelli che hanno creduto in questa iniziativa e l'hanno incoraggiata promuovendola nei loro Atenei e nella scuola nazionale del dottorato di ricerca in Rilievo e rappresentazione dell'architettura e dell'ambiente.

*Riccardo Migliari*

# Costruzioni relative al cerchio\*

Federico Fallavollita

## 4.1 Costruzione del cerchio date tre condizioni (problema di Apollonio)

Fra le opere di Apollonio di Perga, matematico greco vissuto dal 262 al 190 a.c., figura un trattato sulle «Tangenze», che non ci è pervenuto, ma il cui contenuto è noto grazie a una testimonianza di Pappo Alessandrino<sup>1</sup>, matematico del IV secolo d.C. Nelle «Tangenze», Apollonio enunciava e risolveva il seguente problema, passato alla storia con il suo nome: dati tre cerchi, ciascuno dei quali può degenerare in una retta o un punto, trovare un cerchio che tocca ciascuno degli enti dati. Questo problema era stato già affrontato da Euclide nei suoi due casi più semplici: cerchio passante per tre punti o tangente a tre rette. Ma il caso più difficile, e generale, è quello in cui sono dati tre cerchi. La soluzione di Apollonio è andata perduta e il problema è rimasto irrisolto fino al 1600, quando François Viète, un matematico francese, espose, nell'opera *Apollonius Gallus*<sup>2</sup>, le sue soluzioni, utilizzando esclusivamente la riga e il compasso. Prima di lui, però, il matematico belga Adrian van Roomen aveva risolto il problema come intersezione di coniche e, in particolare, di due iperboli in un'opera intitolata *Problema Apolloniacum* (1594)<sup>3</sup>. Dopo il 1600 il noto problema ha interessato diverse personalità del mondo matematico, fra cui Newton (*Arithmetica universalis*, Problema XLVII). Noi, per la soluzione del problema generale, utilizzeremo la costruzione di Van Roomen perché, fra le tante soluzioni proposte, è quella più generale, dato che si ap-

plica a tutte le diverse situazioni che possono verificarsi nel piano e può essere estesa allo spazio per costruire una sfera tangente ad altre quattro date<sup>4</sup>.

Il problema, nel suo complesso, può presentare dieci casi, dal più facile, che è la costruzione del cerchio passante per tre punti dati, in cui la soluzione è una sola, al più difficile che, come abbiamo detto, è la costruzione del cerchio tangente a tre cerchi dati, che presenta otto soluzioni possibili. I dieci casi, e il numero delle soluzioni relative, si possono così riassumere:

- 1) cerchio per tre punti (una soluzione possibile);
- 2) cerchi per due punti e tangente a una retta (due soluzioni possibili);
- 3) cerchi per un punto e tangenti a due rette (due soluzioni possibili);
- 4) cerchi tangenti a tre rette (quattro soluzioni possibili);
- 5) cerchi per due punti e tangenti a una circonferenza (due soluzioni possibili);
- 6) cerchi per un punto, tangenti a una retta e a una circonferenza (quattro soluzioni possibili);
- 7) cerchi per un punto e tangenti a due circonferenze (quattro soluzioni possibili);
- 8) cerchi tangenti a due rette e a una circonferenza (quattro soluzioni possibili);
- 9) cerchi tangenti a una retta e a due circonferenze (otto soluzioni possibili);
- 10) cerchi tangenti a tre circonferenze (otto soluzioni possibili).

\* Il paragrafo 4.14 è a cura di Leonardo Baglioni.

<sup>1</sup> Pappo di Alessandria, *Mathematicae Collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversae, et commentariis illustratae*, Pisaurum, apud Hieronymum Concordiam, MDLXXXVIII.

<sup>2</sup> F. Viète, *Apollonius Gallus seu, Exsuscitata Apollonii Pergaei peri epaphon Geometria, Ad V. C. Adrianum Romanum Belgan*, Le Clerc, Parigi 1600.

<sup>3</sup> A. van Roomen, *Problema Apolloniacum, Adrianum romanum constructum*, Würzburg 1596.

<sup>4</sup> Cfr. R. Migliari, *Rappresentazione come sperimentazione*, in AA.VV., *Ikhnos, analisi grafica e storia della rappresentazione*, Lombardi, Siracusa 2008.

Daremo nel seguito, tanto la rappresentazione grafica, quanto la rappresentazione matematica delle costruzioni relative ai suddetti problemi. Nella modellazione matematica l'uso degli snap rende immediata la soluzione nel piano.

## 4.2 Cerchio per tre punti distinti e non allineati

Questa costruzione è contemplata negli *Elementi* di Euclide (*Elementi*, Libro IV, Proposizione 5) (figura 4.1). Il cerchio richiesto è quello che circoscrive il triangolo individuato dai tre punti **EFG**. Il centro **C** del cerchio è l'intersezione degli assi dei lati del triangolo. Per asse del segmento s'intende il segmento perpendicolare condotto al punto medio di ogni lato. Il raggio del cerchio è determinato dalla distanza dal centro così individuato a uno

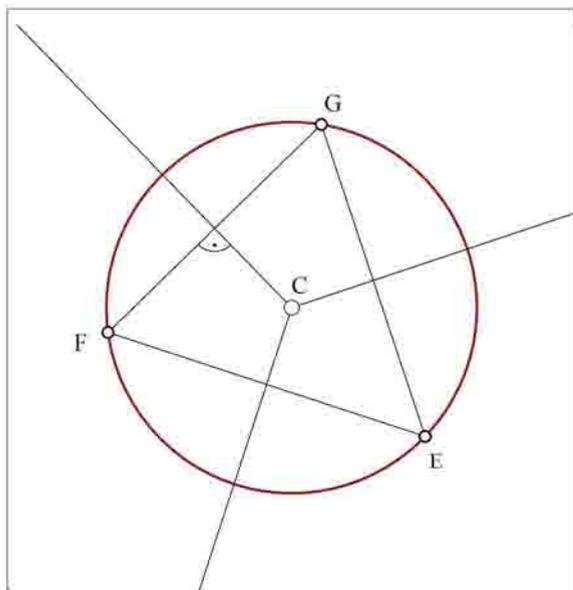


Fig. 4.1

qualsiasi dei tre punti dati. Se i tre punti dati sono allineati, oppure se due di essi coincidono, il problema ha per soluzione la retta cui appartengono, come degenerazione del cerchio; se invece i tre punti sono coincidenti le soluzioni sono le infinite rette del fascio che ha i tre punti coincidenti come centro.

Costruzione grafica:

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, consente di disegnare una linea per i due punti **E** e **F** e per i punti **F** e **G**; conviene mettere l'opzione su «tipo illimitata» quando si disegnano rette e l'opzione su «tipo limitata» quando sono segmenti.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, disegniamo le due ortogonali ai segmenti **EF** e **FG** utilizzando prima lo snap ortogonale e successivamente lo snap punto medio.
- *Strumenti / Snap / perpendicolare*, con lo snap attivo si seleziona il segmento **EF**.
- *Strumenti / Snap / punto medio*, con lo snap attivo si seleziona il punto medio del segmento **EF**; in questo modo abbiamo disegnato una retta ortogonale al segmento **EF** nel suo punto medio; ripetiamo l'operazione per il segmento **FG**.
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / Centro*, consente di disegnare il cerchio con centro **C** nel punto intersezione trovato e raggio pari alla distanza **CE**.

### Rhinoceros

- *Curve / Line / SingleLine* permette di costruire una linea per i due punti **E** e **F**, per i punti **F** e **G** e per i punti **E** e **G**.
- *Curve / Line / PerpendicularFromCurve* con l'opzione *FromFirstPoint* attivata, permette di costruire una retta a ortogonale a un'altra a partire da un punto di quest'ultima. Utilizzando lo *Snap MidPoint*, tracciamo gli assi dei lati del triangolo.
- *Curve / Circle / Center, Radius* consente di disegna-

Fig. 4.1 Costruzione del cerchio passante per tre punti distinti **E**, **F**, **G** e non allineati. Il centro **C** del cerchio è l'intersezione degli assi dei lati del triangolo (1° problema di Apollonio)

**Fig. 4.2** Teorema della secante e della tangente di Euclide (*Elementi*, Libro III, Proposizione 36): se si conduce da un punto **P** esterno a una circonferenza una tangente **PT** e una secante **PD**, il segmento di tangente **PT** è medio proporzionale tra l'intera secante **PD** e la sua parte esterna **PC**.

re il cerchio con centro **C** nel punto intersezione trovato e raggio pari alla distanza **CE**.

Costruzione immediata: nella modellazione matematica esiste la possibilità di costruire una circonferenza per tre punti.

- **thinkdesign** *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre punti dati.
- **Rhinoceros** *Curve / Circle / 3Points* consente di disegnare il cerchio passante per tre punti.

### 4.3 Cerchi che passano per due punti e sono tangenti a una retta

Il problema ha due soluzioni possibili se i due punti sono tutti e due nello stesso semipiano individuato dalla retta data ed entrambi sono esterni alla retta data. Se invece i due si trovano ognuno in un diverso semipiano il problema non ha soluzioni, com'è evidente perché la retta data taglia qualsiasi cerchio passi per i due punti. Infine, il problema non ha soluzioni se uno dei due punti appartiene alla retta data, a meno che questo non sia il piede della perpendicolare condotta dal punto esterno alla retta, nel qual caso la soluzione è banale. La costruzione fa uso di un noto teorema di Euclide (*Elementi*, Libro III, Proposizione 36):

se un punto **P** è preso fuori dal cerchio, e due linee rette passano per **P** e il cerchio, l'una è secante il cerchio, l'altra è tangente al cerchio, allora il rettangolo contenuto dall'intero segmento secante il cerchio e la parte che lo taglia fuori, fra il punto e la circonferenza, sarà uguale al quadrato della linea tangente.

La proposizione è anche conosciuta come il *teorema della secante e della tangente*: condotte da un pun-

to **P** esterno a una circonferenza una tangente e una secante, il segmento di tangente è medio proporzionale tra l'intera secante e la sua parte esterna (figura 4.2):

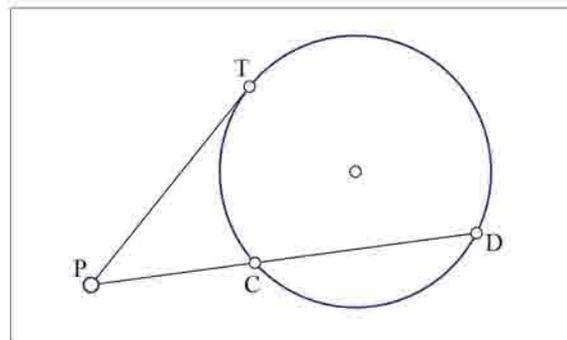
$$PC : PT = PT : PD$$

Dati due punti **A** e **B** e una retta **r** si chiede di individuare i cerchi che toccano tre enti dati (figura 4.3). Si costruisce la retta **s** passante per i punti **A** e **B**. Questa retta interseca la retta data **r** in un punto **S**. Si disegna il cerchio che ha come centro il punto medio **M** del segmento **AS**. Si stacca la perpendicolare **p** per **B** sulla retta **s**. Questa interseca la circonferenza di centro **M** in un punto **D**. Si costruisce la circonferenza di centro **S** e raggio **SD**. In questo modo si riporta la distanza **SD** su **r** nei punti **T** e **T'**, punti di contatto dei cerchi tangenti alla retta **r** e passanti per i punti **A** e **B**. Il problema è così ricondotto alla costruzione del cerchio che passa per tre punti dati. Si noti che il segmento **ST** è medio proporzionale tra **SB** e **SA**.

Costruzione grafica:

**thinkdesign**

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, si costruisce una linea **s** per i due punti **A** e **B**.



**Fig. 4.2**

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / Centro*, si costruisce il cerchio che ha come centro il punto medio di **AS** (il punto **S** è l'intersezione della retta **s** con la retta **r**) e diametro **AS**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, si costruisce la perpendicolare alla retta **s** nel punto **B**; utilizzando lo snap «perpendicolare» prima e «punto estremo» dopo.
- *Strumenti / Snap / perpendicolare*, si seleziona la retta **s**.
- *Strumenti / Snap / punto estremo*, si seleziona il punto **B**; la retta interseca il cerchio di centro **M** in due punti **D** e **D'**.
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / Centro*, costruisci la circonferenza di centro **S** e raggio **SD**; i punti d'intersezione **T** e **T'** del cerchio di centro **S** con la retta **r** sono i punti di contatto dei cerchi tangenti alla retta **r** passanti per i due punti dati **A** e **B**. Il problema è così ricondotto al caso precedente, cioè un cerchio passante per tre punti.

#### Rhinoceros

- *Curve / Line / SingleLine* permette di costruire una linea per i due punti **A** e **B**.
- *Curve / Circle / Center, Radius* si costruisce il cerchio che ha come centro il punto medio di **AS** (il punto **S** è l'intersezione della retta **s** con la retta **r**) e diametro **AS**.
- *Curve / Line / PerpendicularFromCurve* con l'opzione *FromFirstPoint* attivata, permette di costruire una retta ortogonale a un'altra a partire da un punto di quest'ultima. Utilizzando lo *Snap EndPoint*, tracciamo la perpendicolare ad **AS** a partire dal punto **B**.
- *Curve / Circle / Center, Radius* costruisce la circonferenza di centro **S** e raggio **SD**; i punti d'intersezione **T** e **T'** del cerchio di centro **S** con la retta **r** sono i punti di contatto dei cerchi tangenti alla retta **r** passanti per i due punti dati **A** e **B**. Il problema è così ricondotto al caso precedente, cioè un cerchio passante per tre punti.

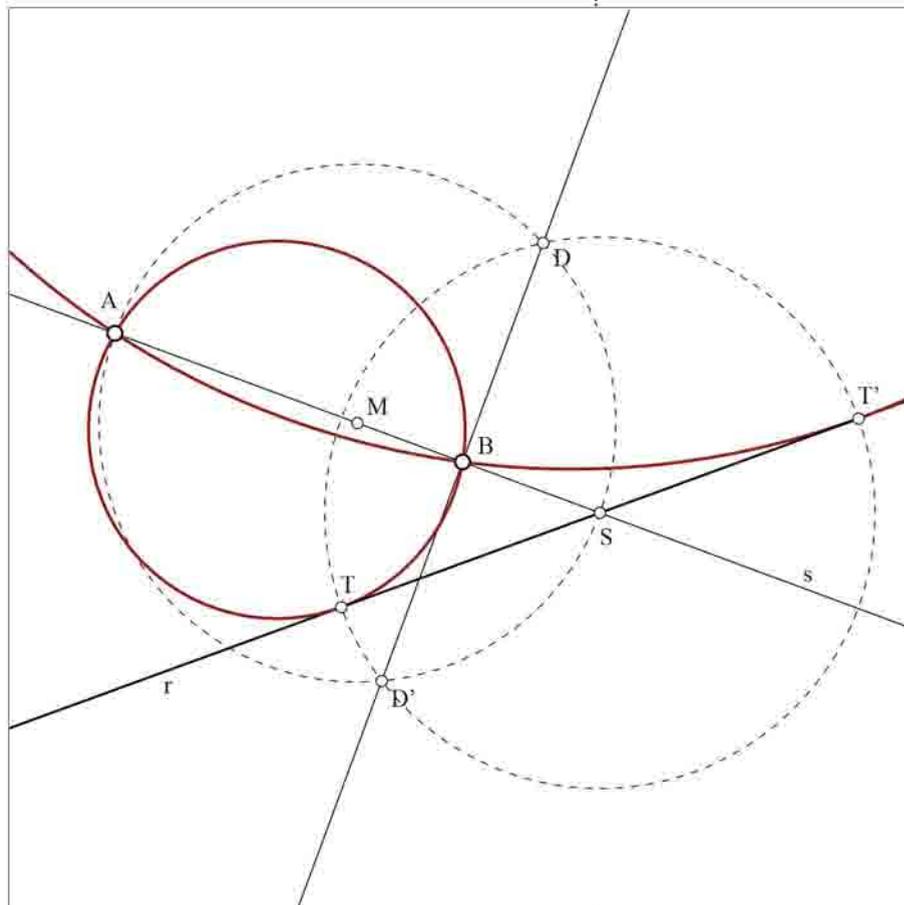


Fig. 4.3

Costruzione immediata:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre enti dati; usiamo lo strumento snap per individuare gli enti opportuni.
- *Strumenti / Snap / punto estremo*, con lo snap attivo si selezionano i due punti **A** e **B** dati.

Fig. 4.3 Costruzione dei cerchi per due punti **A**, **B** e tangenti a una retta **r** (2° problema di Apollonio). Il problema ha due soluzioni possibili se i due punti sono tutti e due nello stesso semipiano individuato dalla retta data ed entrambi sono esterni alla retta data

**Fig. 4.4** Costruzione dei cerchi che passano per un punto e sono tangenti a due rette (3° problema di Apollonio). La soluzione proposta fa uso dell'omotetia

- *Strumenti / Snap / tangente*, con lo snap attivo si selezionano un punto della retta  $r$ .

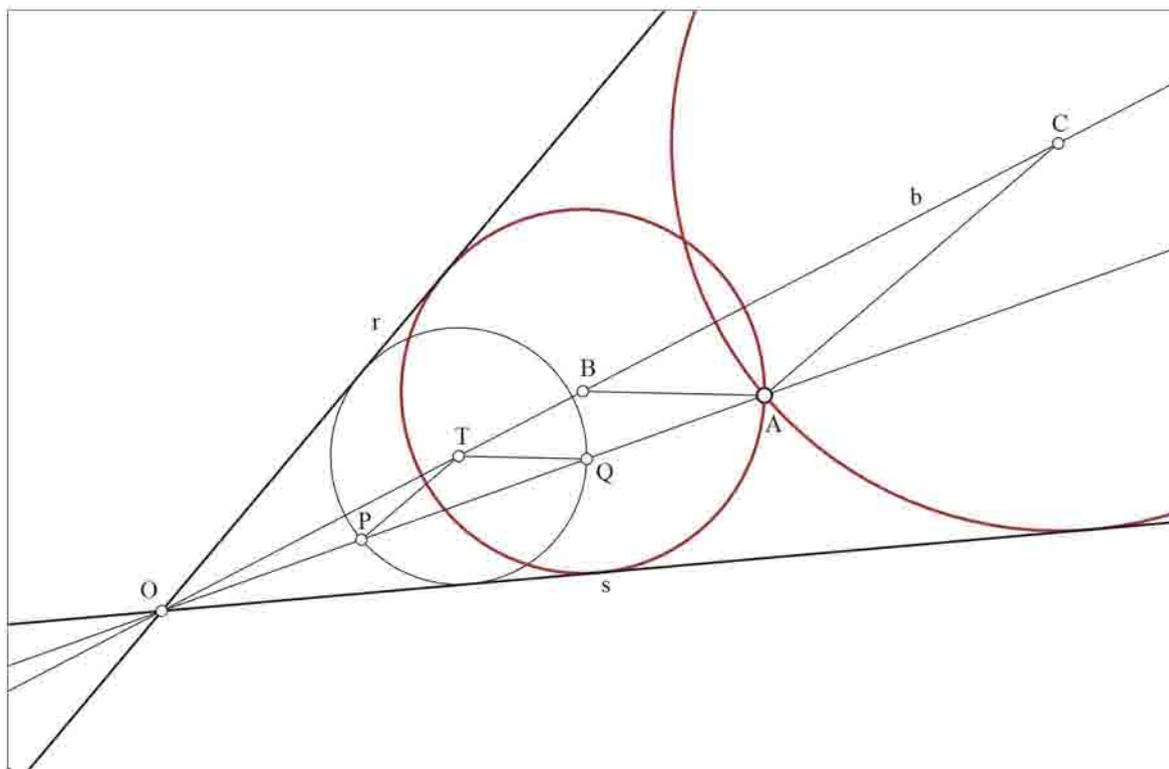
*Rhinoceros*

- *Curve / Circle / TangentToCurves* si indica un punto della retta in prossimità dell'ipotizzato punto di tangenza; si attiva l'opzione *Point* e si selezionano i punti  $A$  e  $B$ .

#### 4.4 Cerchi che passano per un punto e sono tangenti a due rette date

Vi sono diverse possibili soluzioni, quella che proponiamo, per la sua semplicità, fa uso dell'omote-

tia<sup>5</sup>. Sono date due rette  $r$  e  $s$  e un punto  $A$  (figura 4.4). Si costruisce la bisettrice  $b$  dell'angolo, tra quelli formati dalle due rette date, che contiene anche il punto dato; è evidente, infatti, che i centri dei cerchi cercati debbono trovarsi su questa retta. Se le rette  $r$  e  $s$  sono parallele, la bisettrice è una retta parallela ed equidistante dalle due date. Si costruisce un cerchio qualsiasi che abbia centro  $T$  sulla retta  $b$  e sia tangente a una delle due rette. Il cerchio così costruito sarà tangente ad ambedue le rette  $r$  e  $s$ . Si fa passare, per il punto  $O$  che le due rette  $r$  e  $s$  hanno in comune, una secante del cerchio costruito che lo taglia nei punti  $P$  e  $Q$ . Si costruiscono le parallele



**Fig. 4.4**

<sup>5</sup>Cfr. G. Loria, *Metodi matematici, essenza – tecnica – applicazioni*, Hoepli, Milano 1935, cap. 12, par. 37.

alle due rette **PT** e **QT** per il punto dato **A**. I punti di intersezione di queste due rette con la bisettrice **b** danno i due centri **B** e **C** dei cerchi soluzione.

Costruzione grafica:

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / Bisettrice*, consente di disegnare una bisettrice **b** date due rette **r** e **s**.
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / Centro*, costruiamo un cerchio che abbia centro sulla retta **b** e sia tangente alle due rette date **r** e **s**; per fare ciò utilizziamo lo snap «punto su curva» per individuare il centro **T** e lo snap «tangente» alla retta **r** per individuare il raggio.
- *Strumenti / Snap / Punto su curva*, con lo snap attivo si seleziona un punto della retta bisettrice **b**.
- *Strumenti / Snap / tangente*, con lo snap attivo si selezionano un punto della retta **r**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, disegniamo una retta che passa per i punti dati **A** e **O** (punto d'incidenza delle rette **r** e **s**); questa retta interseca la circonferenza di centro **C** in due punti **P** e **Q**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, disegniamo i due raggi **TP** e **TQ**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / Parallela*, disegniamo le due rette parallele ai raggi **TP** e **TQ**; le parallele intersecano la bisettrice **b** in due punti; questi ultimi sono i centri dei cerchi tangenti che risolvono il problema.

### Rhinoceros

- *Curve / Line / Bisector*, consente di disegnare una bisettrice **b** date due rette **r** e **s**.
- *Curve / Circle / Center, Radius* costruiamo un cerchio che abbia centro sulla retta **b** e sia tangente alle due rette date **r** e **s**; per fare ciò utilizziamo lo snap *Near* per individuare il centro **T** e lo snap *Perpendicular* alla retta **r** per individuare il raggio.
- *Curve / Line / SingleLine*, attiviamo lo snap *Tools / ObjectSnap / AlongParallel* per dare la direzione di riferimento dei raggi **TP** e **TQ**; le parallele uscen-

ti da **A** a questi due segmenti, intersecano la bisettrice **b** in due punti; questi ultimi sono i centri dei cerchi tangenti che risolvono il problema.

Costruzione immediata:

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre punti dati.
- *Strumenti / Snap / punto estremo*, con lo snap attivo si seleziona il punto **A**.
- *Strumenti / Snap / tangente*, con lo snap attivo si selezionano un punto della retta **r** e un punto della retta **s**.

### Rhinoceros

- *Curve / Circle / TangentToCurves* si indica prima il punto **A** con l'opzione *point* attivata; si selezionano poi le rette tangenti.

## 4.5 Cerchi tangenti a tre rette date

Come già detto questo è il secondo caso già contemplato negli *Elementi* di Euclide (Libro IV, Proposizione 4). Si possono dare due situazioni: la prima è quando le tre rette individuano un triangolo e la seconda è quando due rette, delle tre, sono parallele. Se le tre rette sono incidenti tutte in un punto oppure sono tutte parallele il problema non ha soluzioni.

Il caso contemplato da Euclide è quello di tre rette non concorrenti in un punto né parallele (figura 4.5). Il problema, allora, ha quattro soluzioni. La prima soluzione è data dal cerchio inscritto nel triangolo formato dalle rette date. Il centro di questo cerchio è, evidentemente, l'incastro del triangolo, ovvero il punto intersezione delle bisettrici degli angoli al vertice. Per costruire gli altri tre cerchi si considerano, semplicemente, gli angoli che le tre rette formano all'esterno del triangolo e le relative bisettrici, che danno, per intersezione, i relativi centri. Nel caso in cui si hanno tre rette di cui due paral-

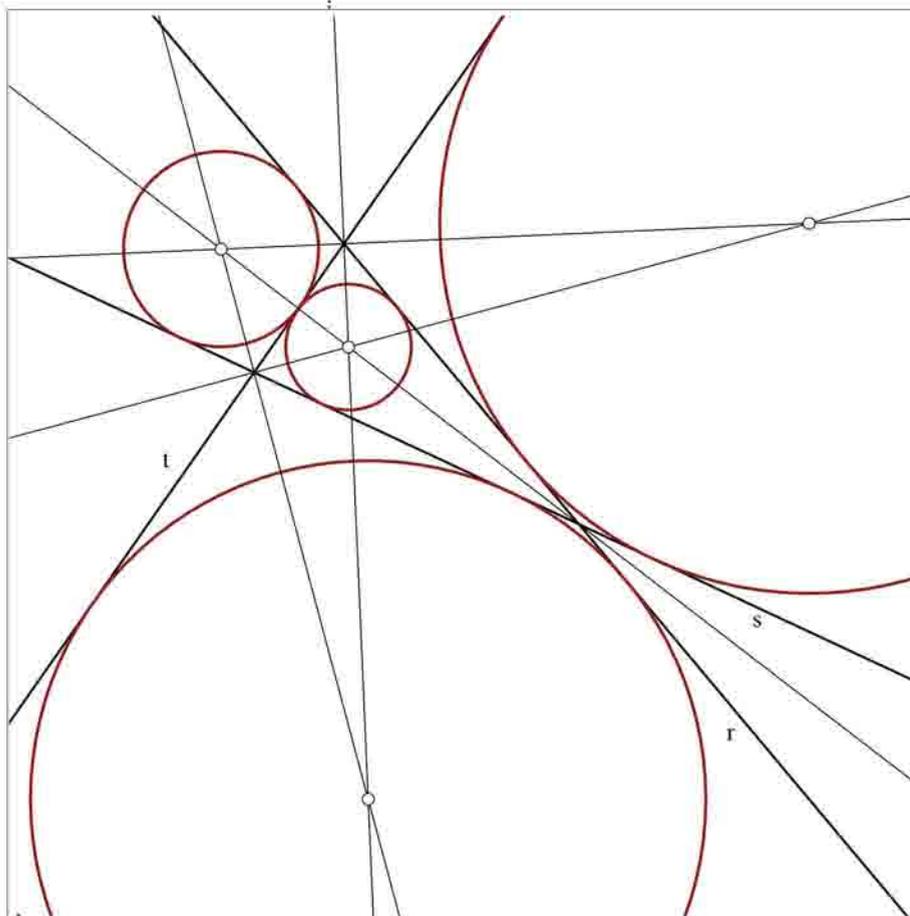


Fig. 4.5

Fig. 4.5 Costruzione dei cerchi tangenti a tre rette date (4° problema di Apollonio). Il caso contemplato da Euclide è quello di tre rette non concorrenti in un punto né parallele. Il problema, allora, ha quattro soluzioni. I centri dei cerchi tangenti sono dati dalle intersezioni delle bisettrici delle rette date

le, il problema ha due soluzioni. Il metodo è il medesimo.

Costruzione grafica:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / Bisettrice*, consente di disegnare una linea bisettrice di due rette; ripetiamo la costruzione per le sei bisettrici.

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, costruiamo dai punti d'intersezione una retta perpendicolare a una qualsiasi delle rette date; in questo modo abbiamo individuato i centri e i raggi dei quattro cerchi tangenti.
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / Centro*, disegniamo i cerchi soluzione del problema.

#### Rhinoceros

- *Curve / Line / Bisector*, consente di disegnare una linea bisettrice di due rette; ripetiamo la costruzione per le sei bisettrici.
- *Curve / Line / SingleLine*, con lo snap *Perpendicular*, costruiamo dai punti d'intersezione una retta perpendicolare a una qualsiasi delle rette date; in questo modo abbiamo individuato i centri e i raggi dei quattro cerchi tangenti.
- *Curve / Circle / Center, Radius* disegniamo i cerchi soluzione del problema.

Costruzione immediata:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre enti dati.
- *Strumenti / Snap / tangente*, con lo snap attivo si selezionano le tre rette; a seconda del punto selezionato sulla retta il modellatore automaticamente genererà il cerchio tangente relativo.

#### Rhinoceros

- *Curve / Circle / TangentToCurves* indicando come curve tangenti le tre rette assegnate.

## 4.6 Cerchi che passano per due punti e sono tangenti a una circonferenza

Per risolvere questo problema è conveniente far uso della teoria dei radicali introdotta per la prima volta dal matematico francese Louis Gaultier de Tours

in una memoria del 15 giugno del 1812<sup>6</sup>. Per poter verificare la soluzione, è necessario innanzitutto descrivere brevemente gli enti geometrici oggetto della teoria dei radicali, che si basa sul già citato teorema di Euclide (*Elementi*, Libro III, Proposizione 36). Dati un punto qualunque  $O$ , nel piano d'una circonferenza di centro  $A$ , facciamo passare per  $O$  una secante al cerchio  $OGK$  e una tangente  $OM$  (figura 4.6); Euclide dimostra che:

$$OK : OM = OM : OG$$

e perciò:

$$OG * OK = OM^2$$

Se dal punto  $O$ , con raggio  $OM = \sqrt{(OK * OG)}$ , descriviamo un cerchio  $O$ , diremo che questo cerchio è *radicale del cerchio A* o *cerchio O radicale A*, e ciò significa: cerchio il cui raggio vale la radice quadrata del prodotto costante formato dalle parti delle secanti staccate dal centro  $O$  della circonferenza sul cerchio di centro  $A$ , al quale è comparato. Dato un punto  $O$ , quindi, esiste soltanto un cerchio  $O$  radicale  $A$ . Tuttavia, esistono due differenti tipi di cerchio radicale, che dipendono dalla posizione del punto  $O$  rispetto al cerchio  $A$ . Infatti, tale posizione può essere interna o esterna al cerchio primitivo  $A$ . Quando il punto  $O$  è all'esterno del cerchio primitivo  $A$ , il raggio del cerchio  $O$  è il segmento  $OM$  che ha per estremi il punto  $O$  e il punto di contatto  $M$ , come abbiamo già detto. Dunque l'angolo  $OMA$  è retto, per costruzione, e  $AM$  è tangente al cerchio  $O$  di modo che il cerchio  $A$  è anch'esso radicale del cerchio  $O$ . I due cerchi si dicono perciò *ortogonali* e sono radicali l'un rispetto all'altro e primitivi l'un rispetto all'altro. Questo primo tipo di cerchio radicale si dice *cerchio radicale reciproco*.

Quando il punto  $O$  è interno al cerchio primitivo  $A$ , il radicale si costruisce come segue: si con-

duce per  $O$  la perpendicolare al raggio  $AO$ , che taglia il cerchio nei punti  $M$  e  $N$ ; quindi si descrive il cerchio che ha  $O$  per centro e  $MN$  per diametro. Se ora si conduce per  $O$  una qualsiasi secante il cerchio  $A$ , che lo taglia nei punti  $G$  e  $K$ , si ha ancora la relazione:

$$OK : OM = OM : OG$$

e perciò:

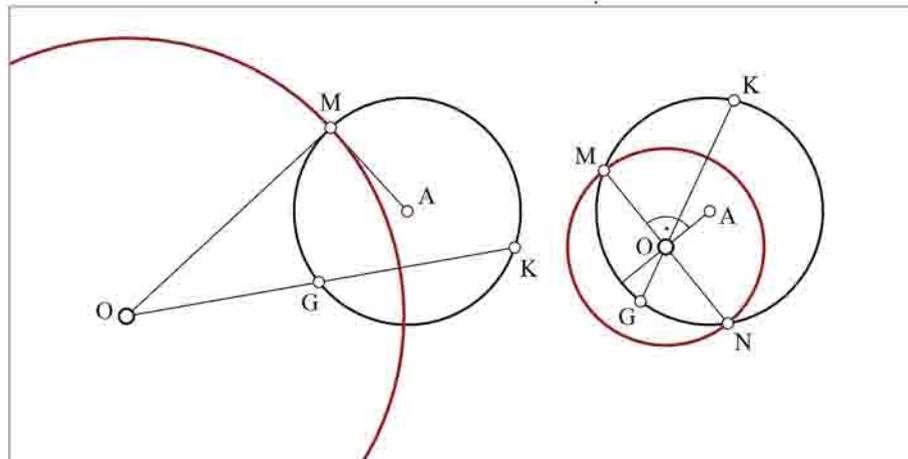
$$OG * OK = OM^2$$

Tuttavia, mentre prima i due cerchi erano radicali reciproci, qui  $O$  è radicale  $A$ , ma non viceversa, ragione per cui il cerchio  $O$  è detto *cerchio radicale semplice* di  $A$ .

Due cerchi  $A$  e  $B$  possono avere cerchi radicali in comune e dello stesso tipo; i centri di questi cerchi si trovano sulla perpendicolare alla retta che unisce i centri  $A$  e  $B$ . Questa perpendicolare si dice *asse radicale AB*. Possono darsi tre casi (figura 4.7). I due cerchi  $A$  e  $B$  si tagliano in  $F$  e in  $G$ , in questo caso la ret-

**Fig. 4.6** Se dal punto  $O$ , con raggio  $OM = \sqrt{(OK * OG)}$ , descriviamo un cerchio  $O$ , diremo che questo cerchio è *radicale del cerchio A* o *cerchio O radicale A*, e ciò significa: cerchio il cui raggio vale la radice quadrata del prodotto costante formato dalle parti delle secanti staccate dal centro  $O$  della circonferenza sul cerchio di centro  $A$ , al quale è comparato.

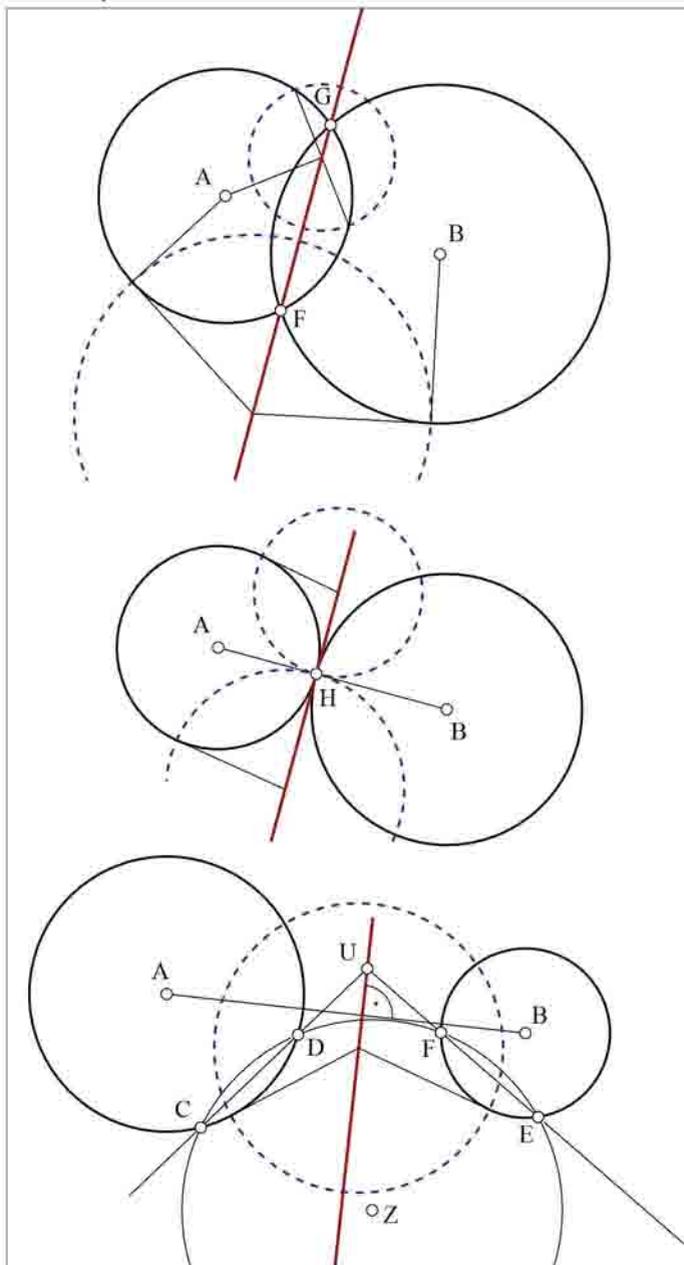
<sup>6</sup> L. Gaultier de Tours, *Sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle déterminé par trois conditions, et une Sphère déterminé par quatre conditions; Lu à la première Classe de l'Institut, 15 juin 1812*, «Journal de l'Ecole polytechnique», XVI, 124-14.



**Fig. 4.6**

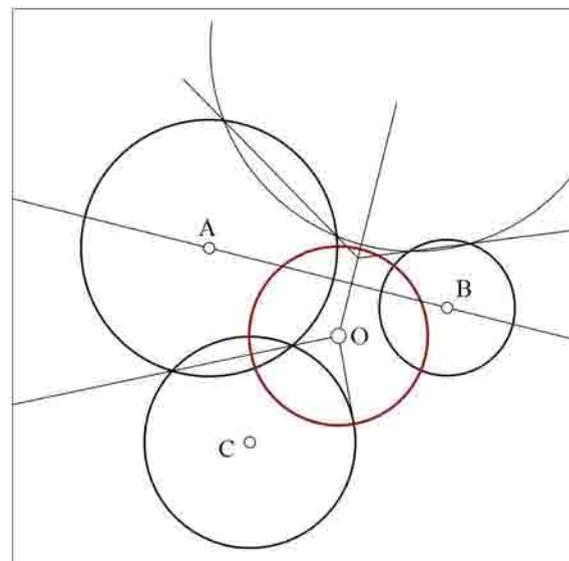
**Fig. 4.7** Due cerchi **A** e **B** possono avere cerchi radicali in comune e dello stesso tipo; i centri di questi cerchi si trovano sulla perpendicolare alla retta che unisce i centri **A** e **B**. Questa perpendicolare si dice *asse radicale* **AB**. Possono darsi tre casi

**Fig. 4.8** Tre cerchi **A**, **B**, **C**, i cui centri non siano allineati, hanno cerchio radicale comune che ha centro nel punto **O** comune agli assi radicali e raggio la distanza di **O** dal punto di contatto di una qualsiasi tangente condotta da **O** a uno dei cerchi dati



**Fig. 4.7**

ta **FG** è il loro asse radicale. I due cerchi **A** e **B** sono tangenti in **H**, allora i due punti **F** e **G** si confondono in **H** e l'asse radicale è la tangente comune in **H**, inoltre tutti i cerchi radicali comuni sono radicali reciproci. Infine: i due cerchi non hanno punti in comune e sono esterni l'uno all'altro, allora tutti i cerchi radicali comuni sono reciproci, come nel caso precedente. In questo caso l'asse radicale si costruisce come segue: con centro in un punto **Z** qualsiasi si tagliano i due cerchi dati nei punti **C**, **D** ed **E**, **F**. Si prolungano le due corde **CD** ed **EF** fino al punto d'intersezione **U**. Si conduce per **U** la perpendicolare alla retta **AB**, che unisce i due centri dei cerchi dati, e questa è l'asse radicale cercato. Si noti che (figura 4.8), comunque si prenda il punto **Z**, la costruzione determina univocamente l'asse radicale, che è uno soltanto. Ne consegue che tre cerchi **A**, **B**, **C**, i cui centri non siano allineati, hanno cerchio radicale comune che ha centro nel punto **O** comune agli



**Fig. 4.8**

assi radicali e raggio la distanza di **O** dal punto di contatto di una qualsiasi tangente condotta da **O** a uno dei cerchi dati.

La teoria dei radicali offre una semplice soluzione del quinto caso del problema di Apollonio. Sono dati due punti **A** e **B** e una circonferenza di centro **C** (figura 4.9). Si traccia una circonferenza **D** di raggio a piacere che passa per i due punti dati **A** e **B** e taglia la circonferenza **C** in due punti **P** e **Q**. I due punti **P** e **Q** individuano l'asse radicale del cerchio dato e di quello ora costruito. Si traccia la retta **r** passante per **A** e **B**. Questa è l'asse radicale delle circonferenze che si vuole costruire e del cerchio **D**. Il punto **O** è il punto comune agli assi radicali. Le tangenti condotte dal punto **O** al cerchio **C** individuano i due punti **S** e **T** di contatto dei cerchi che risolvono il problema con il cerchio dato. Il problema si riconduce così alla costruzione di cerchi che passano per le due terne di punti **A, B, S** e **A, B, T**. Costruzione grafica:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i due punti **A** e **B** e raggio qualsiasi; il cerchio deve intersecare la circonferenza **C** in due punti **P** e **Q**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, costruiamo per i punti d'intersezione **P** e **Q** una retta **r**; e per i punti **A** e **B** un'altra retta.
- *Modifica / Aggiusta curve*, consente di tagliare le rette suddette nel punto d'incidenza **O**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, costruisce le due rette tangenti al cerchio **C** dal punto **O**; come abbiamo detto i punti **S** e **T** sono i punti di contatto dei cerchi che risolvono il problema.

#### Rhinoceros

- *Curve / Circle / Center, Radius* consente di disegnare un cerchio per i due punti **A** e **B** e raggio qualsiasi; il cerchio deve intersecare la circonferenza **C** in due punti **P** e **Q**.

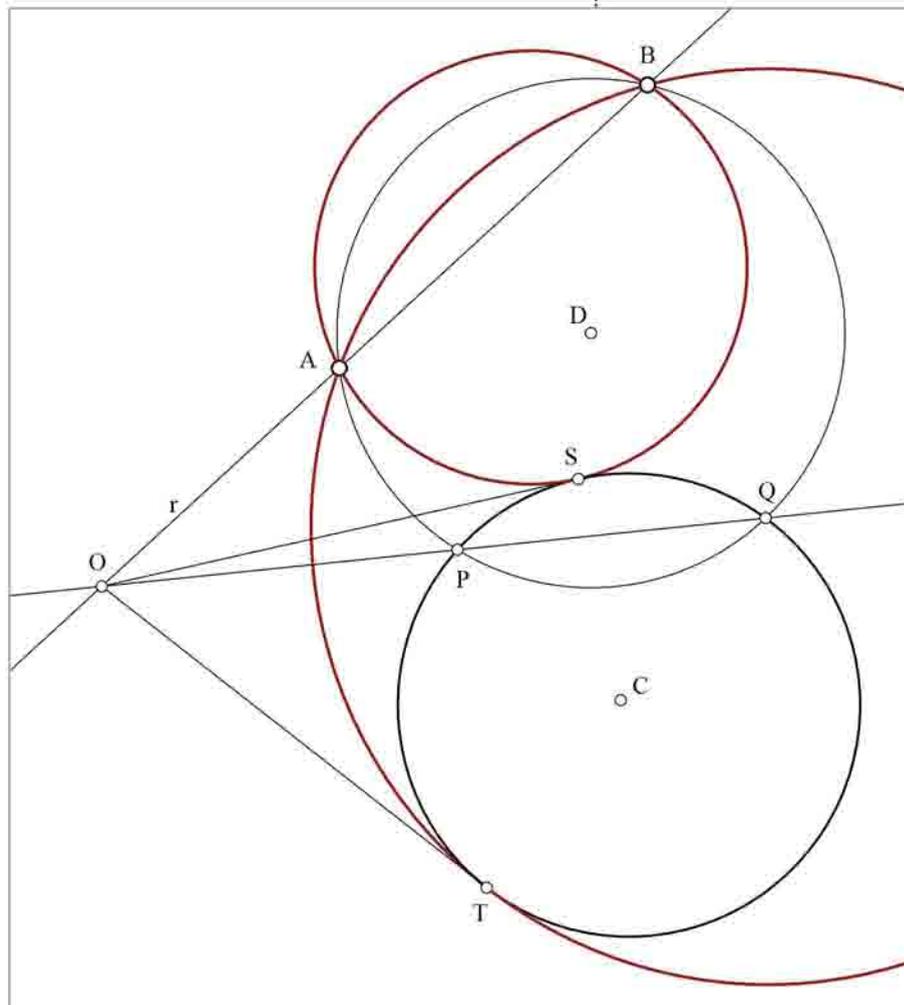


Fig. 4.9

- *Curve / Line / SingleLine*, costruiamo per i punti d'intersezione **P** e **Q** una retta **r**; e per i punti **A** e **B** un'altra retta.
- *Curve / Line / SingleLine*, costruiamo le due rette tangenti al cerchio **C** dal punto **O**; i punti **T** e **S** sono i punti di contatto dei cerchi tangenti che ri-

Fig. 4.9 Costruzione dei cerchi passanti per due punti **A** e **B** e tangenti a una circonferenza data di centro **C** (5° problema di Apollonio). La teoria dei radicali offre una semplice soluzione del quinto caso del problema di Apollonio

solvono il problema; il problema si riduce a cercare una circonferenza per tre punti.

Costruzione immediata:

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre enti dati.
- *Strumenti / Snap / Punto estremo*, con lo snap attivo si selezionano i due punti **A** e **B**.
- *Strumenti / Snap / Tangente*, con lo snap attivo si seleziona il cerchio **C**; a seconda del punto selezionato del cerchio dato **C**, viene generato automaticamente il cerchio tangente cercato.

### Rhinoceros

- *Curve / Circle / TangentToCurves* si indicano prima i punti **A** e **B** con l'opzione *point* attivata; si seleziona poi la circonferenza **C**.

## 4.7 Cerchi per un punto dato, tangenti a una retta e a una circonferenza pure assegnate

La costruzione più elegante è quella che utilizza i luoghi geometrici. Questa soluzione ha un carattere generale e perciò sarà illustrata e giustificata con la soluzione del caso più complesso (vedi paragrafo 4.11 della seconda parte). Per il momento limitiamoci a considerare che i luoghi geometrici dei centri dei cerchi tangenti a una coppia di dati (cerchi, punti, o rette) siano quelli elencati nella tabella seguente.

Dati	Luogo geometrico dei centri
Un punto e un cerchio, l'uno esterno all'altro	Iperbole
Un punto e un cerchio al suo interno	Ellisse
Due cerchi che non siano interni l'uno all'altro	due Iperboli
Due cerchi uno dei quali interno all'altro	Ellisse
Un cerchio e una retta, distinti	due Parabole
Un punto e una retta, distinti	Parabola
Due rette incidenti o parallele	due Rette o una Retta
Due punti distinti	Retta

In questo caso sono dati un punto **A**, una retta **r** e una circonferenza **C** (figura 4.10). Si costruisce, dunque, l'iperbole luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti al cerchio **C** e passanti per il punto **A**. Si costruisce la parabola luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti alla retta **r** e passanti per il punto **A**. L'intersezione di queste curve, cioè dei due rami d'iperbole e della parabola, dà i due centri **W** e **Z** dei cerchi tangenti.

Costruzione grafica della parabola:

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, permette di costruire il segmento **AP** ortogonale alla retta data **r** per il punto **A**.
- *Inserisci / Curve / Coniche / Parabola*, costruisce la parabola; il vertice **T** è il punto medio del segmento **AP**; la lunghezza dell'asse, richiesta dal comando, è  $TP = AT$ .

### Rhinoceros

- *Curve / Line / SingleLine*, con lo snap *Perpendicular* si costruisce il segmento ortogonale alla retta data **r** per il punto **A**; il punto **P** è il punto sulla retta **r**.
- *Curve / Parabola / Vertex, Focus*, diamo come vertice della parabola il punto medio del segmento **AP** e come fuoco il punto **A**.

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, costruisce il segmento **AC**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, costruisce il segmento **VR** di lunghezza pari al raggio del cerchio **C** dato e punto medio **O** coincidente con il punto medio del segmento **AC**.
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / Centro*, costruisce un cerchio con centro in **O** e diametro **AC**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, costruisce una retta ortogonale ad **AC** e passante per **V** o **R**; questa retta taglia la circonferenza di centro **O** nei punti **E** ed **F**.

- *Inserisci / Curve / Coniche / Iperbole*, costruisce l'iperbole; il punto **O** è il centro; il segmento **VR** fornisce la lunghezza dell'asse trasverso; il segmento **EF** fornisce la lunghezza dell'asse coniugato.
- *Modifica / Rifletti*, permette di costruire il secondo ramo dell'iperbole, sfruttando la simmetria.
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e archi / Cerchio*, permette di costruire i cerchi richiesti con centri **W** e **Z**, all'intersezione delle coniche e raggi rispettivamente **AW** e **AZ**.

#### Rhinoceros

- *Curve / Line / SingleLine*, si costruisce il segmento **AC**.
- *Curve / Line / SingleLine*, si costruisce il segmento **VR** pari alla lunghezza del raggio del cerchio **C** dato (questa linea è il primo asse trasverso dell'iperbole cercata); il punto medio **O** del segmento suddetto deve combaciare con il punto medio della linea **AC** (si può tracciare il raggio di **C** seguendo la direzione **AC**, e spostarlo dal suo punto medio al punto medio di **AC**).
- *Edit / Split*, dividiamo il primo asse trasverso rispetto la sua metà definita da **O**.
- *Curve / Circle / Center, Radius* si disegna un cerchio con centro in **O** e diametro **AC**.
- *Curve / Line / PerpendicularFromCurve*, con l'opzione *FromFirstPoint* attivata, si costruisce il segmento che incontra in **E** il cerchio di raggio **O**, che rappresenta la metà del secondo asse trasverso.
- *Analyze / Length*, si misurano le lunghezze dei semiassi trasversi.
- *Hyperbola / Center, Coefficient*, con l'opzione *BothBranches* attivata, si costruisce l'iperbole dando come centro il punto **O**, come direzione quella del segmento **OA** (basta cliccare sul punto **A**), e infine dando come valori dei coefficienti **A** e **B** rispettivamente le lunghezze del primo e del secondo semiasse trasverso.

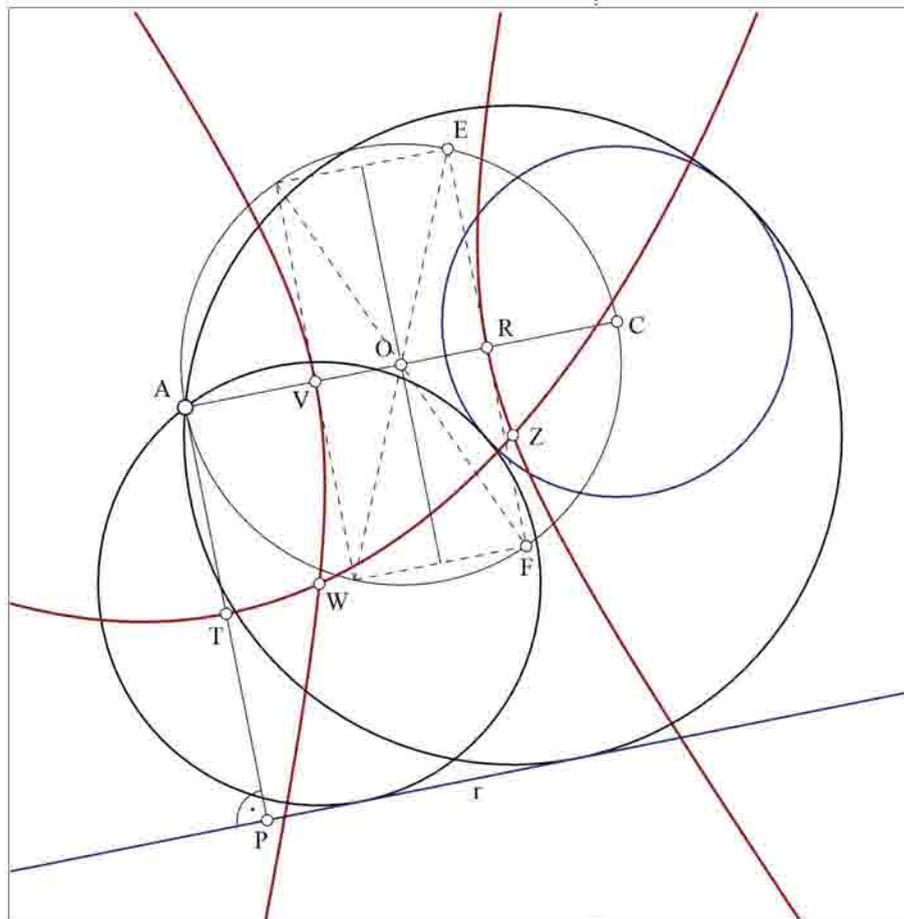


Fig. 4.10

Costruzione immediata:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre enti dati.
- *Strumenti / Snap / Punto estremo*, con lo snap attivo si seleziona il punto **A**.
- *Strumenti / Snap / Tangente*, con lo snap attivo si seleziona la retta **r**.

Fig. 4.10 Costruzione dei cerchi per un punto dato **A**, tangenti a una retta **r** e a una circonferenza pure assegnate di centro **C** (6° problema di Apollonio). Si costruisce l'iperbole luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti al cerchio **C** e passanti per il punto **A**. Si costruisce la parabola luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti alla retta **r** e passanti per il punto **A**. L'intersezione di queste curve, cioè dei due rami d'iperbole e della parabola, dà i due centri **W** e **Z** dei cerchi tangenti

**Fig. 4.11** Costruzione dei cerchi per un punto dato **P**, tangenti a due circonferenze pure assegnate di centri **A** e **B** (6° problema di Apollonio). Si costruisce l'iperbole luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti al cerchio **A** e passanti per il punto **P**. Si costruisce una seconda iperbole luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti al cerchio **B** e passanti per il punto dato **P**. I punti intersezione di queste curve, cioè dei quattro rami d'iperbole, dà i quattro centri dei cerchi richiesti

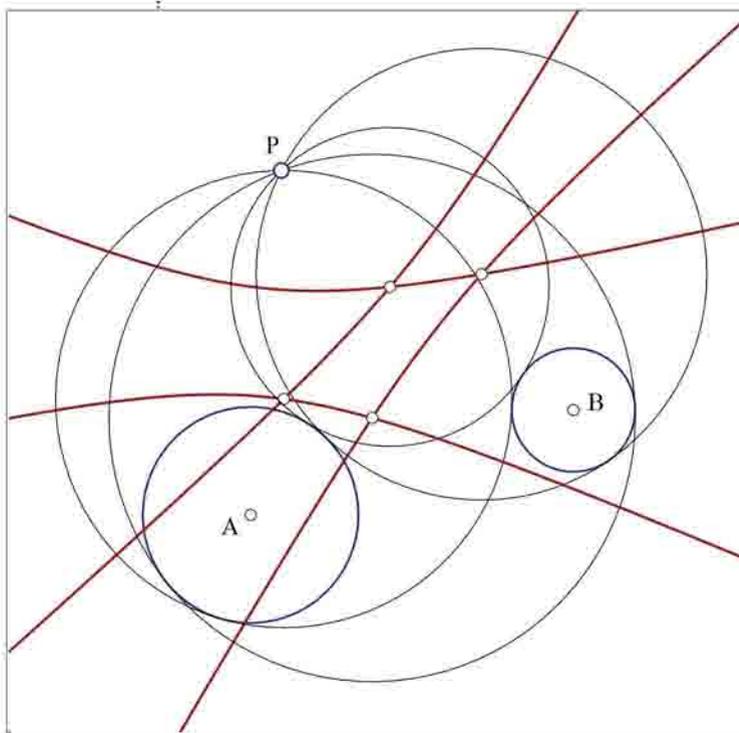
- *Strumenti / Snap / Tangente*, con lo snap attivo si seleziona il cerchio **C**; a seconda del punto selezionato del cerchio dato **C**, viene generato automaticamente il cerchio tangente voluto.

*Rhinoceros*

- *Curve / Circle / TangentToCurves*, si indica prima il punto **A** con l'opzione *point* attivata; si seleziona poi la circonferenza **C** e la retta **r**.

#### 4.8 Cerchi per un punto dato, tangenti a due circonferenze pure assegnate

Sono dati un punto **P** e due circonferenze di centro **A** e **B** (figura 4.11). Si costruisce l'iperbole luogo



**Fig. 4.11**

geometrico dei centri dei cerchi tangenti al cerchio **A** e passanti per il punto **P**. Si costruisce una seconda iperbole luogo dei centri dei cerchi tangenti al cerchio **B** e passanti per il punto dato **P**. I punti intersezione di queste curve, cioè dei quattro rami d'iperbole, dà i quattro centri dei cerchi richiesti. Per la descrizione della costruzione grafica si rimanda al paragrafo precedente.

Costruzione immediata:

*thinkdesign*

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre enti dati.
- *Strumenti / Snap / Punto estremo*, con lo snap attivo si seleziona il punto **P**.
- *Strumenti / Snap / Tangente*, con lo snap attivo si seleziona il cerchio **A** e il cerchio **B**; a seconda del punto selezionato del cerchio dato **A** e **B** viene generato automaticamente il cerchio tangente voluto.

*Rhinoceros*

- *Curve / Circle / TangentToCurves*, si indica prima il punto **P** con l'opzione *point* attivata; si seleziona poi la circonferenza **A** e la circonferenza **B**.

#### 4.9 Cerchi tangenti a due rette date e a una circonferenza pure assegnata

Sono date due rette incidenti **r** e **s** in un punto e una circonferenza di centro **C** (figura 4.12). Si disegna la retta bisettrice **b** luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti alle due rette. Poi si disegnano le due parabole luogo dei centri dei cerchi tangenti alla circonferenza **C** e a una delle due rette date. Le intersezioni fra le parabole e la bisettrice danno i centri dei cerchi tangenti richiesti. Nell'esempio illustrato i cerchi sono quattro. Se la circonferenza è secante le due rette, le soluzioni possibili sono otto.

Costruzione grafica:

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / Bisettrice*, si costruisce la bisettrice delle rette  $r$  e  $s$ , luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti alle due rette date.
- *Inserisci / Curve / Coniche / Parabola*: costruisce le parabole fra la retta  $r$  e il cerchio: la prima ha il vertice  $V$  nel punto medio del segmento che misura la minima distanza della circonferenza dalla retta  $r$ ; la seconda ha il vertice  $V'$  nel punto medio del segmento  $PQ$  che invece misura la massima distanza perpendicolare alla retta  $r$ ; il fuoco di entrambe le parabole è il centro del cerchio  $C$ .
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e archi / Cerchio*, permette di costruire i cerchi richiesti.

### Rhinoceros

- *Curve / Line / Bisector*, si costruisce la bisettrice delle rette  $r$  e  $s$ , luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti alle due rette date.
- *Curve / Parabola / Vertex, Focus*, diamo come vertice il punto medio del segmento di minima distanza fra la circonferenza  $C$  e la retta  $r$  e come fuoco il centro  $C$ ; per la seconda parabola diamo come vertice il punto medio del segmento  $QP$  e come fuoco il centro  $C$ .

Una volta costruite le due curve coniche e la retta bisettrice il sistema è risolto. Le intersezioni fra le curve dà i quattro centri dei cerchi tangenti ai tre dati.

Costruzione immediata:

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre enti dati.
- *Strumenti / Snap / Tangente*, con lo snap attivo si selezionano le due rette  $r$  e  $s$  e un punto del cerchio  $C$ ; dalla scelta opportuna del punto di contatto si genera immediatamente il cerchio tangente soluzione.

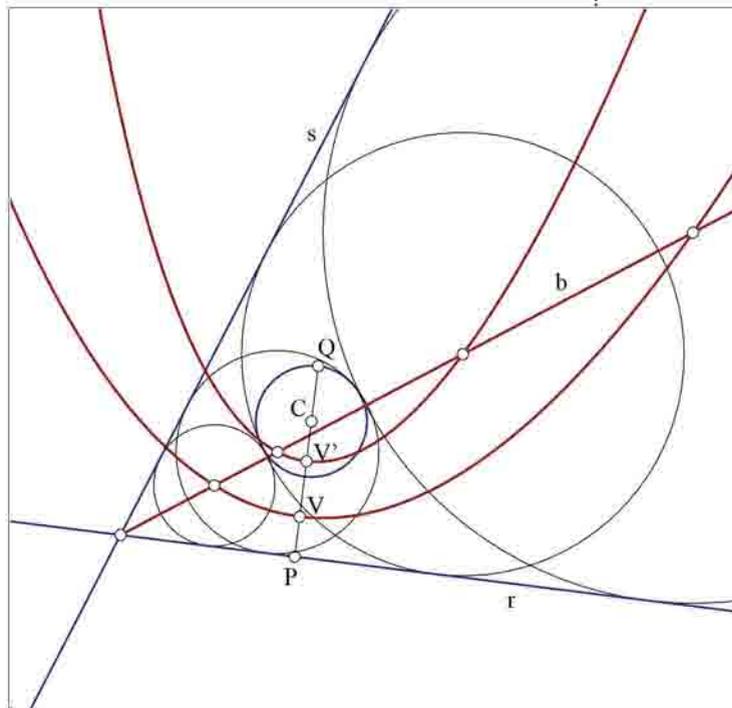


Fig. 4.12

### Rhinoceros

- *Curve / Circle / TangentToCurves* si indica prima il cerchio  $C$  e poi le rette  $r$  e  $s$  nelle zone in cui si presume verrà a trovarsi la soluzione.

## 4.10 Cerchi tangenti a una retta data e a due circonferenze, pure assegnate

Sono date una retta  $r$  e due circonferenze di centro  $C$  e  $D$  (figura 4.13). Si costruiscono le quattro parabole luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti alle due circonferenze e alla retta  $r$ . In particolare si costruiscono le due parabole fra il cerchio  $C$  e la retta  $r$  e le due parabole fra il cerchio  $D$  e la retta  $r$ .

Fig. 4.12 Costruzione dei cerchi tangenti a due rette date  $r$  e  $s$  e a una circonferenza pure assegnata di centro  $C$  (7° problema di Apollonio). Si disegna la retta bisettrice  $b$  luogo geometrico dei centri dei cerchi tangenti alle due rette. Poi si disegnano le due parabole luogo dei centri dei cerchi tangenti alla circonferenza  $C$  e a una delle due rette date. Le intersezioni fra le parabole e la bisettrice danno i centri dei cerchi tangenti richiesti

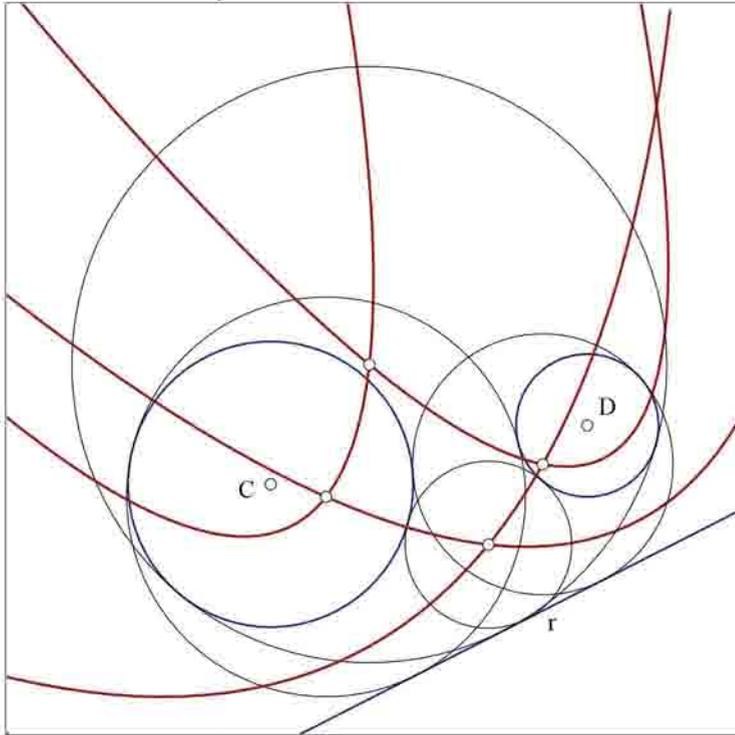


Fig. 4.13

**Fig. 4.13** Costruzione dei cerchi tangenti a una retta data  $r$  e a due circonferenze, pure assegnate di centro  $C$  e  $D$  (8° problema di Apollonio)

**Fig. 4.14** La differenza delle distanze di  $P$  dai centri delle due circonferenze è costante. Questo luogo è un'iperbole e i suoi fuochi sono i centri  $A$  e  $B$  dei due cerchi dati

<sup>7</sup> Cfr. R. Migliari, *Il problema di Apollonio e la Geometria descrittiva*, «Disegnare, idee immagini», XXXVI, Gangemi, Roma 2008.

I punti intersezione fra le parabole danno i centri dei cerchi soluzione. Nell'esempio i cerchi tangenti sono quattro ma possono essere otto se le due circonferenze e la retta date sono secanti fra loro. Per la costruzione grafica si rimanda al paragrafo precedente. Costruzione immediata:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*: consente di disegnare un cerchio per i tre enti dati.
- *Strumenti / Snap / Tangente*: con lo snap attivo si selezionano la retta  $r$  e le due circonferenze  $C$  e  $D$ ; dalla scelta opportuna del punto di contatto si genera immediatamente il cerchio tangente.

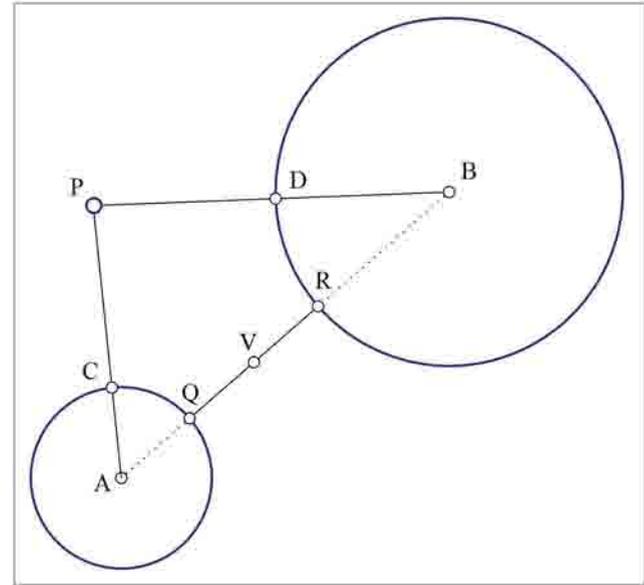


Fig. 4.14

#### Rhinoceros

- *Curve / Circle / TangentToCurves* si indica prima il cerchio  $C$  e poi le rette  $r$  e  $s$  nei punti in cui si presume verrà a trovarsi la soluzione; il comando garantisce la caratteristica di tangenza del cerchio.

### 4.11 Cerchi tangenti a tre circonferenze date

Questo è il caso più complesso e ha otto soluzioni possibili<sup>7</sup>. Ciò significa che le soluzioni possono essere otto al massimo, senza escludere, perciò, che qualcuna, tra esse, venga a mancare. Consideriamo i due cerchi  $A$  e  $B$  (figura 4.14). Supponiamo che  $P$  sia uno dei punti cercati, equidistante dalle circonferenze che hanno centro in  $A$  e in  $B$ . Le distanze suddette si misurano, evidentemente, sui raggi  $AP$

e  $BP$ , nei segmenti  $CP$  e  $DP$ , dove  $C$  e  $D$  sono i punti che i raggi  $AP$  e  $BP$  hanno in comune, rispettivamente, con le due circonferenze: Posto che, per assunto:

$$CP = DP$$

e che:

$$\begin{aligned} CP &= AP - AC \\ DP &= BP - BD \end{aligned}$$

sostituendo si ottiene:

$$AP - AC = BP - BD$$

e, perciò:

$$AP - BP = AC - BD.$$

Ma  $AC - BD$  è la differenza dei raggi dei due cerchi considerati, e dunque è una costante:

$$AC - BD = k.$$

Perciò  $AP - BP = k$ , il che significa che il punto  $P$ , e con lui qualsiasi punto che sia equidistante dalle due circonferenze date, gode di questa proprietà: la differenza delle distanze di  $P$  dai centri delle due circonferenze è costante. Questo luogo è un'iperbole e i suoi fuochi sono i centri  $A$  e  $B$  dei due cerchi dati. Il punto medio del segmento  $QR$  staccato, dalle due circonferenze, all'interno di  $AB$  è uno dei vertici,  $V$ . Infatti, questo punto  $V$  è equidistante dalle circonferenze e perciò appartiene all'iperbole, inoltre appartiene alla retta che passa per i fuochi, cioè all'asse dell'iperbole. Si può dunque tracciare l'iperbole per mezzo dell'asse trasverso e del suo coniugato (figura 4.15). Con centro nel punto medio  $O$ , del segmento  $AB$ , che è anche il centro dell'iper-

bole, essendo equidistante dai fuochi, si traccia la circonferenza di diametro  $AB$ . Per il vertice  $V$  si conduce una perpendicolare all'asse  $AB$  fino a incontrare la circonferenza nei punti  $E$  ed  $F$ . Le rette  $EO$  e  $FO$  descrivono gli asintoti dell'iperbole. Si completa il rettangolo che ha  $EF$  come lato ed  $EO$ ,  $FO$  come semidiagonali. Le mediane di questo rettangolo (considerate in grandezza e posizione) sono l'asse trasverso dell'iperbole (quello che appartie-

Fig. 4.15 Il luogo geometrico dei punti coerentemente equidistanti da due circonferenze distinte è un'iperbole. Si può tracciare l'iperbole per mezzo dell'asse trasverso e del suo coniugato. L'asse trasverso  $VR$  è pari alla differenza dei raggi dei cerchi  $A$  e  $B$  ed è centrato sul punto medio  $O$  della distanza massima fra i due centri  $A$  e  $B$  (fuochi dell'iperbole). L'asse coniugato  $EF$  è pari all'intersezione della perpendicolare passante per  $V$  o per  $R$  e della circonferenza di diametro  $AB$  e centro  $O$

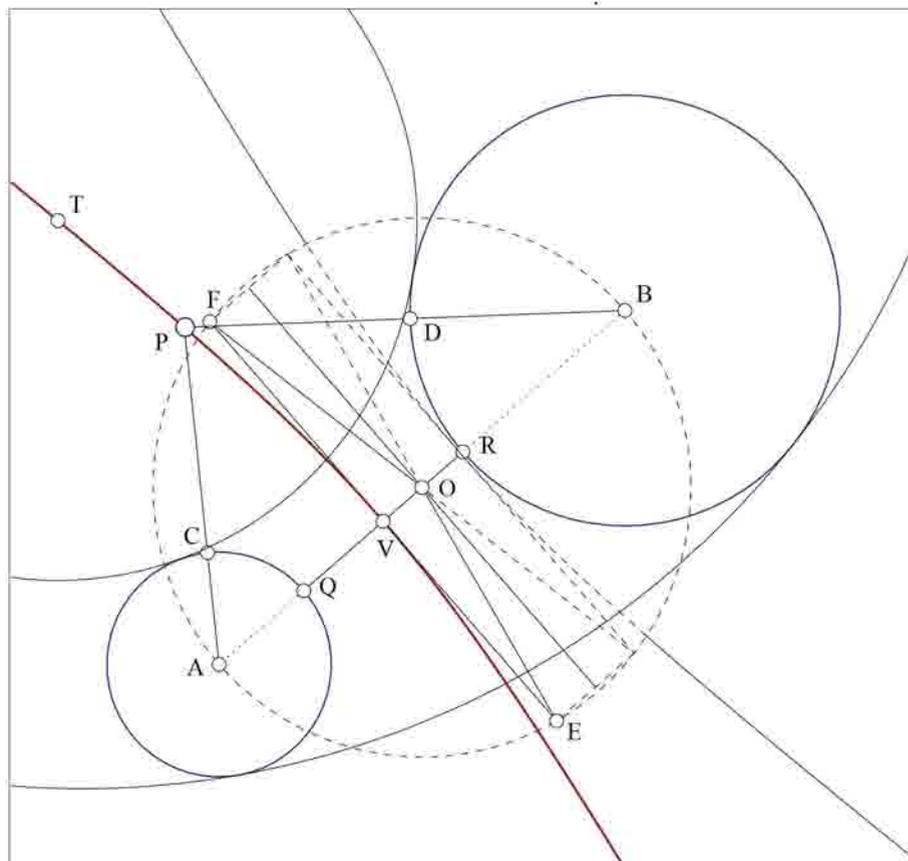
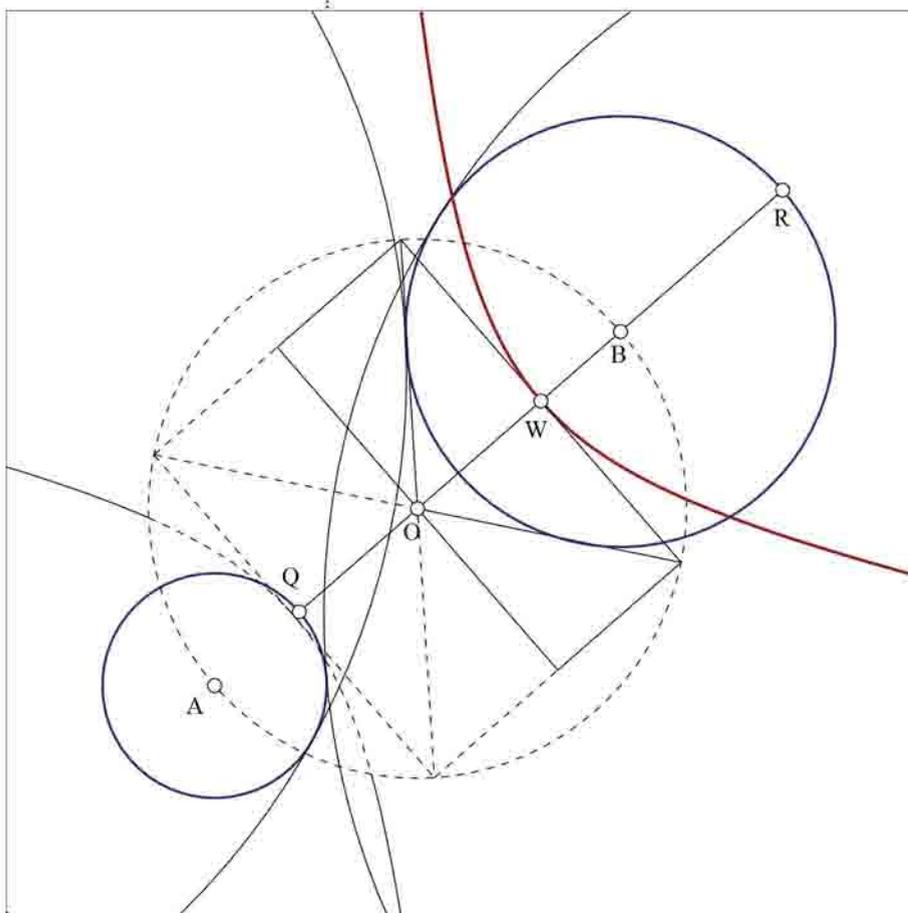


Fig. 4.15

**Fig. 4.16** Il luogo geometrico dei punti alternativamente equidistanti da due circonferenze distinte è un'iperbole. In questo caso la lunghezza dell'asse trasverso **QW** è pari alla somma dei raggi dei due cerchi

ne ad **AB**) e il suo *coniugato*, detto anche *asse non trasverso*, e determinano l'iperbole stessa, la quale può essere tracciata, in un disegno digitale, con accuratezza pari a quella di un cerchio. In questo modo abbiamo disegnato il primo ramo d'iperbole che è luogo dei centri delle circonferenze che toccano i due cerchi lasciandoli entrambi all'esterno. Il secondo ramo dell'iperbole, simmetrico per costru-

zione al primo rispetto all'asse, è luogo dei centri delle circonferenze che toccano i due cerchi dati comprendendoli entrambi al loro interno. Esistono, però, altre due possibili situazioni: quella di cerchi che sono ancora una volta tangenti a entrambi i cerchi dati, ma toccano l'uno all'esterno, mentre comprendono l'altro al loro interno e viceversa. Per costruire anche i luoghi geometrici descritti dai centri di questi cerchi, basta considerare un segmento **QR** che attraversi uno dei cerchi dati fino a toccarlo con il primo estremo, mentre il secondo tocca il secondo cerchio dall'esterno (figura 4.16). Applicando le medesime considerazioni che abbiamo già esposto, potremo generare una seconda iperbole, confocale alla prima, i cui due rami sono i luoghi geometrici dei centri dei cerchi che, come si è detto, toccano i cerchi dati lasciandone uno all'esterno mentre comprendono l'altro al loro interno. Il problema di Apollonio attraverso le considerazioni suddette è risolto. Infatti, è chiaro che, quando sono dati tre cerchi e si vuole costruire un cerchio che sia tangente a tutti, basta costruire le iperboli luogo geometrico dei punti equidistanti che abbiamo descritto. I punti comuni a queste iperboli, se esistono, forniscono le soluzioni del problema e, se non esistono, segnalano che non tutte le soluzioni sono possibili. Stabiliamo ora una convenzione che ci permetta di identificare le varie soluzioni del problema. Abbiamo visto che un cerchio può toccare un altro cerchio lasciandolo all'esterno o comprendendolo all'interno. Conveniamo che il cerchio dato sia semplicemente identificato con il nome del suo centro: **A**, **B** e **C**, ad esempio, quando siano dati tre cerchi; e che un cerchio tangente, per esempio ad **A**, sia chiamato **Ae** se lo tocca lasciandolo all'esterno e **Ai** se lo tocca invece comprendendolo al suo interno. In questo modo, per fare un esempio, il cerchio **AiBeCe**, sarà quello che abbraccia il cerchio dato **A** (comprendendolo) e tocca **B** e **C**, lasciandoli fuori. Adottando questa convenzione, i rami delle iperboli, sa-



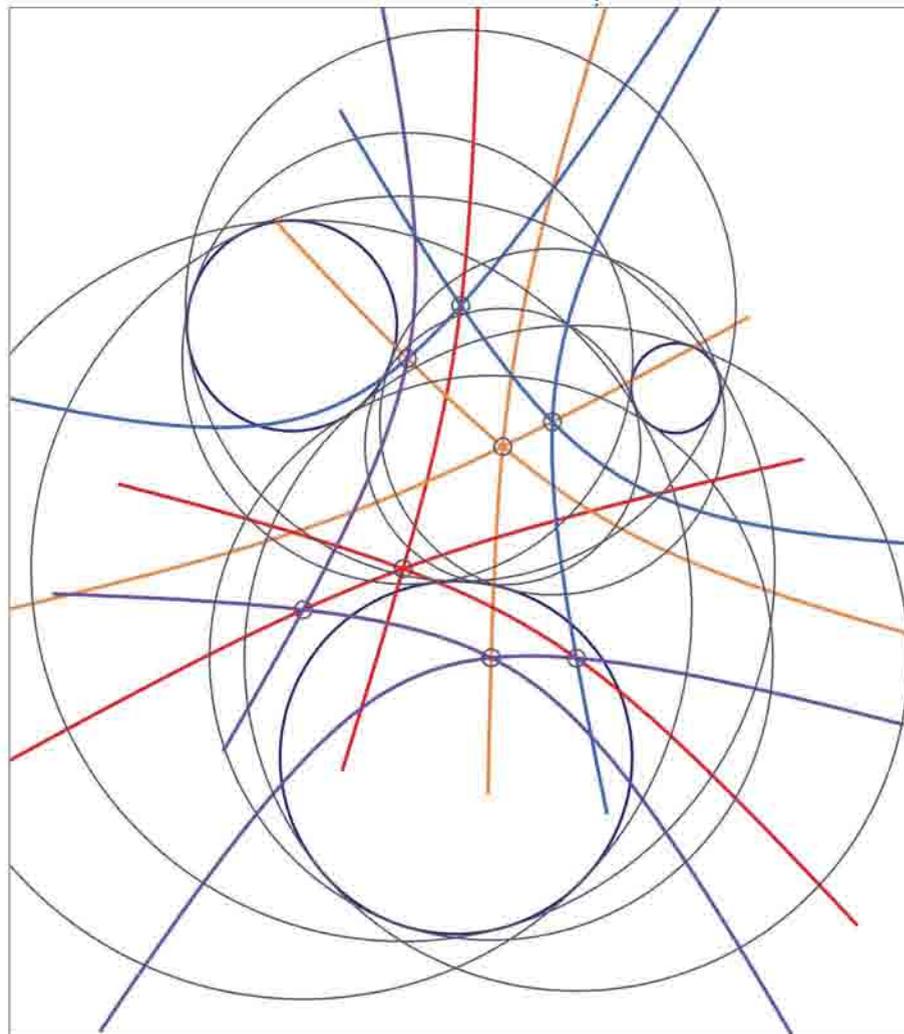
**Fig. 4.16**

ranno contrassegnati con i nomi dei cerchi tangenti di cui ospitano il centro. Ad esempio, **AeBe**, sarà il ramo di iperbole che è luogo geometrico dei centri dei cerchi che toccano i due cerchi dati lasciandoli entrambi all'esterno. In questo modo è facile contare le soluzioni del problema compilando la seguente tabella:

**Tangenze di un cerchio rispetto ad altri tre**

1	Ai	Bi	Ci
2	Ai	Bi	Ce
3	Ai	Be	Ci
4	Ai	Be	Ce
5	Ae	Bi	Ci
6	Ae	Bi	Ce
7	Ae	Be	Ci
8	Ae	Be	Ce

Quando le otto soluzioni sono possibili i dodici rami di iperbole che definiscono i luoghi geometrici di cui abbiamo discusso, si tagliano a tre a tre esattamente in otto punti, che sono i centri dei cerchi che soddisfano la domanda posta da Apollonio (figura 4.17). Per cercare il centro di una delle soluzioni possibili conviene considerare la relativa combinazione. Così, per esempio, per trovare il cerchio **AiBiCi** bisogna cercare il punto d'intersezione delle iperboli **AiBi**, **AiCi** e **BiCi**. Questa soluzione è notevole perché, oltre a dare la chiave per risolvere il problema nello spazio, contempla i casi precedenti: quando uno dei due cerchi degenera in un punto, il luogo geometrico dei punti equidistanti da entrambi è ancora un'iperbole. Se invece un cerchio degenera in una retta, il luogo geometrico è una parabola. Infine, se un cerchio è interno all'altro, il luogo geometrico che cerchiamo è un'ellisse. Dimostrare queste affermazioni, seguendo ragionamenti analoghi a quello che abbiamo già mostrato, è semplice per cui mostriamo solo gli esiti nelle figure (figura 4.18). e (figura 4.19).



**Fig. 4.17**

Costruzione grafica:

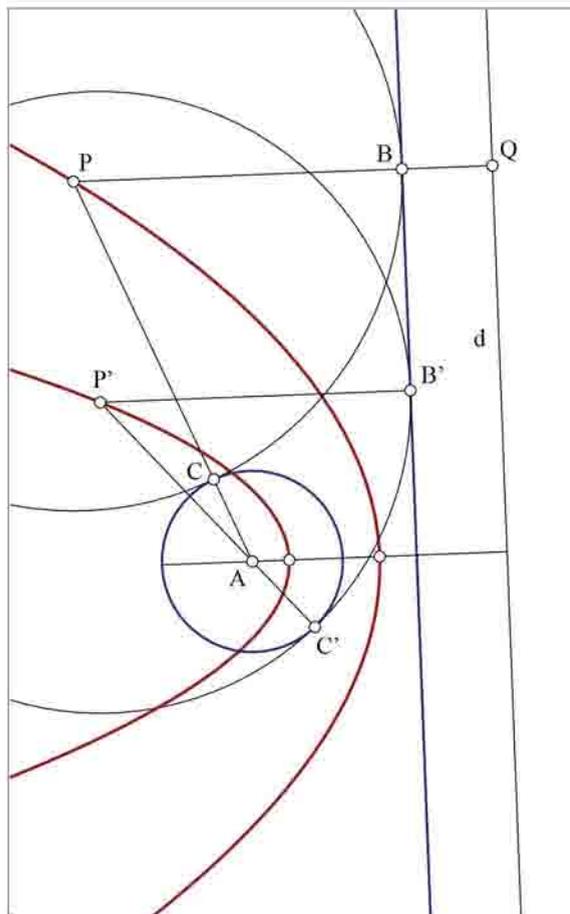
*thinkdesign*

- **Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti**, disegniamo una linea per i due punti **A** e **B**, centri rispettivi dei due cerchi dati.

**Fig. 4.17** Costruzione dei cerchi tangenti a tre cerchi dati (10° problema di Apollonio). Quando le otto soluzioni sono possibili i dodici rami di iperbole che definiscono i luoghi geometrici dei centri dei cerchi tangenti a due a due, si tagliano a tre a tre esattamente in otto punti, che sono i centri dei cerchi che soddisfano il problema

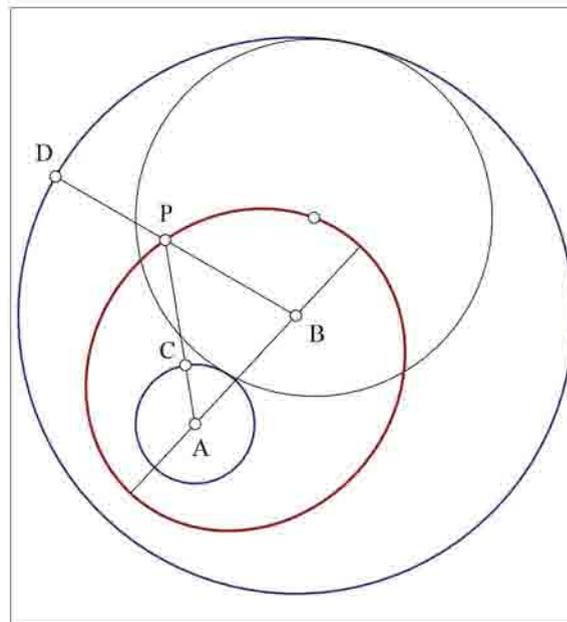
**Fig. 4.18** Il luogo dei punti equidistanti da una circonferenza e da una retta, distinte, sono due parabole

**Fig. 4.19** Il luogo dei punti equidistanti da due circonferenze, una interna all'altra, è un'ellisse



**Fig. 4.18**

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, disegniamo un segmento **RV** parallelo al segmento suddetto, pari alla differenza dei due raggi dei cerchi **A** e **B**.
- *Modifica / Sposta*, spostiamo il segmento **RV** dal suo punto medio al punto medio del segmento **AB**; questo è l'asse trasverso dell'iperbole luogo geometrico dei centri dei cerchi che toccano all'interno i cerchi **A** e **B**; notiamo che il punto **V**



**Fig. 4.19**

deve essere il punto medio del segmento della minima distanza fra i due cerchi **A** e **B**.

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / Centro*, si costruisce il cerchio con centro nel punto **O**, punto medio del segmento **AB**, e raggio pari alla metà del segmento **AB**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, si disegna la retta perpendicolare al segmento **AB** nel punto **V**; utilizzando prima lo snap perpendicolare, avendo cura di selezionare la retta **AB**, e poi lo snap punto estremo selezionando il punto **V**.
- *Modifica / Aggiusta curve secondo limiti*, si taglia la retta suddetta nei punti **E** ed **F** intersezione della stessa con la circonferenza di centro **O**; questo segmento **EF** è l'asse coniugato dell'iperbole.
- *Modifica / Sposta*, spostiamo il segmento **EF** dal suo punto estremo **E** al punto **O**; il significato di

questa operazione risiede solamente in una maggiore comodità per eseguire il comando successivo: costruire il ramo d'iperbole luogo geometrico dei cerchi che toccano all'interno il cerchio **A** e il cerchio **B**.

- *Inserisci / Curve / Coniche / Iperbole*, costruisce il primo ramo dell'iperbole.
- *Modifica / Rifletti*, costruisce il secondo ramo dell'iperbole.

Ripetiamo la costruzione suddetta prendendo come asse trasverso la lunghezza pari alla somma dei raggi dei centri **A** e **B**. L'intera costruzione va fatta per un'altra coppia di cerchi, per esempio la coppia **B** e **C**. Abbiamo costruito quattro iperboli che sono sufficienti per determinare tutte le soluzioni del problema. Infatti, le intersezioni fra i corrispondenti rami d'iperbole danno gli otto centri cercati.

#### Rhinoceros

- *Curve / Line / SingleLine*, disegniamo una linea per i due punti **A** e **B**, centri rispettivi dei due cerchi dati.
- *Curve / Line / SingleLine*, disegniamo un segmento **RV** parallelo al segmento suddetto, pari alla differenza dei due raggi dei cerchi **A** e **B**; per farlo, basta copiare il cerchio **A** dal suo centro al centro di **B** e tracciare il segmento di differenza tra i due raggi.
- *Transform / Move*, spostiamo il segmento appena creato dal suo punto medio al punto medio di **AB**; questo è il primo asse trasverso dell'iperbole luogo geometrico dei centri dei cerchi che toccano all'interno i cerchi **A** e **B**; notiamo che il punto **V** deve essere il punto medio del segmento della minima distanza fra i due cerchi **A** e **B**.
- *Edit / Split*, dividiamo il primo asse trasverso rispetto la sua metà definita da **O**.
- *Curve / Circle / Center, Radius*, si disegna un cerchio con centro in **O** e diametro **AB**.

- *Curve / Line / PerpendicularFromCurve*, con l'opzione *FromFirstPoint* attivata, si costruisce a partire da **V**, il segmento che incontra in **E** il cerchio di raggio **O**; esso rappresenta la metà del secondo asse trasverso.
- *Analyze / Length*, si misurano le lunghezze dei semiassi trasversi.
- *Hyperbola / Center, Coefficient*, con l'opzione *BothBranches* attivata, si costruisce l'iperbole dando come centro il punto **O**, come direzione quella del segmento **OA** (basta cliccare sul punto **A**), e infine dando come valori dei coefficienti **A** e **B** rispettivamente le lunghezze del primo e del secondo semiassi trasverso.

Costruzione immediata:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per tre punti dati; utilizzando lo snap tangente possiamo disegnare un cerchio tangente ad altri tre.
- *Strumenti / Snap / tangente*, con lo snap attivo si seleziona un punto del cerchio che viene toccato facendo attenzione a individuare la parte esterna o interna di esso rispetto alla soluzione cercata.

#### Rhinoceros

- *Curve / Circle / TangentToCurves*, si indicano i cerchi nei punti in cui si presume verrà a trovarsi la soluzione; il comando garantisce la caratteristica di tangenza del cerchio.

## 4.12 Costruzione del cerchio inscritto in un triangolo

Questo è il quarto caso del problema di Apollonio ed è contemplato negli *Elementi* di Euclide (Libro IV, Proposizione 4). Il problema è il medesimo perché il cerchio inscritto in un triangolo non è altro che un cerchio tangente a tre rette date (vedi paragrafo 4.5 della seconda parte). Infatti, un triangolo è

**Fig. 4.20** Costruzione del cerchio inscritto in un triangolo. Il centro **P** del cerchio inscritto è dato dalle intersezioni delle bisettrici degli angoli formati dai lati del triangolo. Questo punto è notevole e si chiama *incentro*. Il raggio del cerchio è la minima distanza dell'incentro da uno dei lati del triangolo circoscritto

dato quando si hanno tre rette non concorrenti in un punto e a due a due non parallele (figura 4.20). Il centro **P** del cerchio inscritto è dato dalle intersezioni delle bisettrici degli angoli formati dai lati del triangolo. Questo punto è notevole in un triangolo e si chiama *incentro*. Il raggio del cerchio è la distanza dell'incentro da uno dei suoi lati.

Costruzione grafica:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / Bisettrice*, consente di disegnare la bisettrice dell'angolo formato da due lati del triangolo, ad esempio **a** e **b**; bastano due bisettrici per determinare l'incentro.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, costruisce dal punto d'intersezione un segmento perpendicolare a uno qualsiasi degli spigoli del triangolo; in questo modo abbiamo individuato il centro **P** e il raggio del cerchio inscritto.
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / Centro*, disegna il cerchio tangente soluzione del problema.

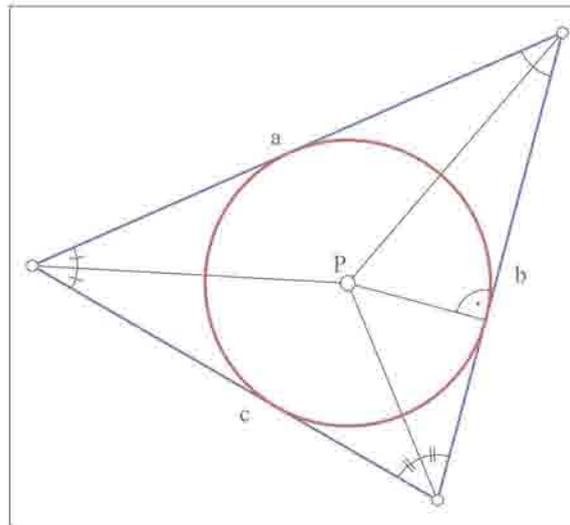


Fig. 4.20

#### Rhinoceros

- *Curve / Line / Bisector*, consente di disegnare una linea bisettrice di due spigoli **a** e **b**; ripetiamo la costruzione per **b** e **c**; bastano due bisettrici per determinare l'incentro.
- *Curve / Line / SingleLine*, costruiamo dal punto d'intersezione un segmento perpendicolare a uno qualsiasi degli spigoli del triangolo; in questo modo abbiamo individuato il centro e il raggio del cerchio inscritto.
- *Curve / Circle / Center, Radius* disegnamo il cerchio tangente soluzione del problema.

Costruzione immediata:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre enti dati.
- *Strumenti / Snap / tangente*, con lo snap attivo si selezionano le tre rette; a seconda del punto selezionato sulla retta il modellatore automaticamente genererà il cerchio tangente relativo.

#### Rhinoceros

- *Curve / Circle / TangentToCurves* consente di disegnare un cerchio tangente ai tre enti dati.

### 4.13 Costruzione del cerchio circoscritto a un triangolo

Questo è il primo caso sviluppato nel problema di Apollonio ed è contemplato negli *Elementi* di Euclide (Libro IV, Proposizione 5). Il centro del cerchio **P** è l'intersezione degli assi dei lati del triangolo (figura 4.21). Questo punto è notevole in un triangolo e si chiama *circocentro*. Il raggio del cerchio è la distanza del circocentro da uno qualsiasi dei tre vertici.

Costruzione grafica:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, consente di costruire le due ortogonali ai segmenti **AB** e **BC** uti-

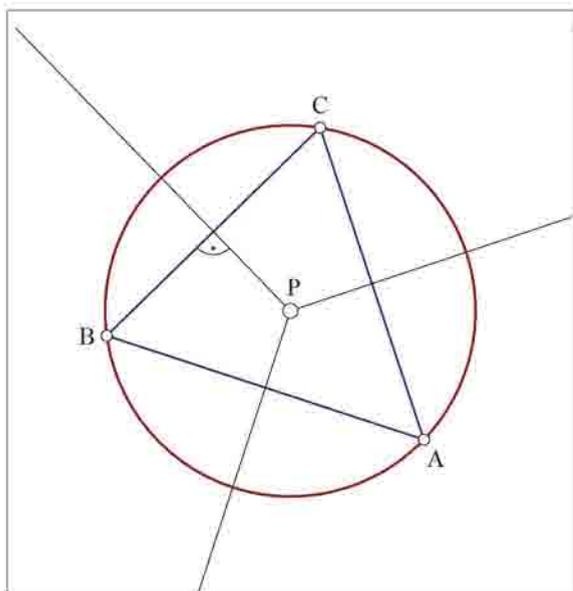


Fig. 4.21

lizzando prima lo snap ortogonale e successivamente lo snap punto medio; è sufficiente disegnare solo due dei tre assi del triangolo per individuare il circocentro.

- *Strumenti / Snap / perpendicolare*, con lo snap attivo si seleziona il segmento **AB**.
- *Strumenti / Snap / punto medio*, con lo snap attivo si seleziona il punto medio del segmento **AB**; in questo modo abbiamo disegnato una retta ortogonale al segmento **AB** nel suo punto medio; ripetiamo l'operazione per il segmento **BC**.
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / Centro*, consente di disegnare il cerchio con centro **P** nel punto intersezione trovato e raggio pari alla distanza **PA**.

#### Rhinoceros

- *Curve / Line / PerpendicularFromCurve* con l'opzione *FromFirstPoint* attivata, permette di co-

struire una retta a ortogonale a un'altra a partire da un punto di quest'ultima. Utilizzando lo *Snap MidPoint*, tracciamo gli assi dei lati del triangolo.

- *Curve / Circle / Center, Radius* consente di disegnare il cerchio con centro **P** nel punto intersezione trovato e raggio pari alla distanza **PA**.

Costruzione immediata:

Nella modellazione matematica esiste la possibilità di costruire una circonferenza per tre punti.

- *thinkdesign Inserisci / Disegno / Cerchi e Archi / 3 punti*, consente di disegnare un cerchio per i tre punti dati.
- *Rhinoceros Curve / Circle / 3Points*, consente di disegnare il cerchio passante per tre punti.

## 4.14 Costruzione del cerchio tangente a due cerchi con diversa giacitura (configurazione di Kasner)

Nel giugno del 1903 viene pubblicato sulla rivista «The American Mathematical Monthly» un articolo di Edward Kasner (1878-1955) dal titolo *The Apollonian Problem in Space*.

Purtroppo Kasner attualmente viene ricordato più che per le sue ricerche condotte nella disciplina, per aver coniato il termine *googol* (su suggerimento del nipote di nove anni!) con cui nominare un numero molto grande: 1 seguito da 100 zeri. Il famoso motore di ricerca in Internet, deve il suo nome proprio a questo termine.

L'articolo tratta di un'estensione particolare del problema di Apollonio nello spazio ovvero quello della costruzione di una circonferenza tangente a due assegnate e liberamente disposte nello spazio. Ricordiamo che due curve sono tangenti quando le tangenti nel punto di contatto coincidono e che due curve, anche non complanari, si dicono ortogonali,

**Fig. 4.21** Costruzione del cerchio circoscritto a un triangolo. Il centro del cerchio **P** è l'intersezione degli assi dei lati del triangolo. Questo punto si chiama *circocentro*. Il raggio del cerchio è la distanza del circocentro da uno qualsiasi dei tre vertici

- *TransformRotate3-D*, con l'opzione copia attivata, ruota il cerchio  $C'$  attorno la retta  $r$ .

Adesso abbiamo due circonferenze  $C$  e  $C''$  sul piano  $\alpha$ , dobbiamo costruire l'asse radicale di  $C$  e  $C''$ ; per fare ciò, nel nostro esempio, basta tracciare la linea che unisce i due punti d'intersezione delle due circonferenze  $C$  e  $C''$  (nel quinto paragrafo del problema di Apollonio c'è una spiegazione completa dei cerchi radicali e delle loro proprietà).

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, disegniamo l'asse radicale  $s$  unendo i punti intersezione dei cerchi  $C$  e  $C''$  (vedi paragrafo 4.6 della seconda parte).
  - *Modifica / Aggiusta Curve*, prolunghiamo l'asse radicale  $s$  e la retta  $r$  fino a farle incontrare nel loro punto d'incidenza; chiamiamo questo punto  $O$ .
  - *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, disegniamo le quattro tangenti al cerchio  $C$  e  $C'$  dal punto  $O$ ; chiamiamo i punti di tangenza sui cerchi con la lettera  $T$ ; possiamo verificare che queste tangenti hanno tutte la medesima lunghezza e appartengono tutte alla sfera di centro  $O$  e raggio la lunghezza delle tangenti; questa sfera è la sfera ortogonale ai due cerchi  $C$  e  $C'$ .
  - *Inserisci / Primitiva / Sfera*, per chi vuole visualizzare la sfera può costruirla ma non è necessario ai fini del risultato. Adesso il problema è determinato: scegliamo due tangenti a piacere e spostiamo il sistema di riferimento sul piano che esse individuano.
  - *Modifica / Piano di Lavoro / 3 punti*, scegliamo tre punti appartenenti alle due tangenti; per esempio le estremità di una e un'estremità dell'altra.
  - *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, disegniamo le due linee perpendicolari a due delle tangenti; le perpendicolari devono appartenere al piano che individuano le due tangenti scelte.
- *Modifica / Aggiusta Curve*: prolunghiamo le due linee fino a farle incontrare in un punto che è poi il centro di uno dei quattro cerchi soluzioni; è possibile verificare, se la costruzione è corretta, che le due linee sono uguali perché sono raggi della circonferenza.

Per trovare le altre tre soluzioni bisogna ripetere gli ultimi tre passaggi della costruzione suddetta.

### Rhinoceros

- *Curve / Line / SingleLine*, costruisce l'asse radicale  $s$ , unendo i punti intersezione dei cerchi  $C$  e  $C''$ .
- *Curve / ExtendCurve / ExtendCurve*, estende l'asse radicale fino a incontrare in  $O$  la retta  $r$ .
- *Curve / Line / SingleLine*, disegniamo le quattro tangenti al cerchio  $C$  e  $C'$  dal punto  $O$ ; chiamiamo i punti di tangenza sui cerchi con la lettera  $T$ ; possiamo verificare che queste tangenti hanno tutte la medesima lunghezza e appartengono tutte alla sfera di centro  $O$  e raggio la lunghezza delle tangenti; questa sfera è la sfera ortogonale ai due cerchi  $C$  e  $C'$ .
- *Solid / Sphere*, per chi vuole visualizzare la sfera può costruirla ma non è necessario ai fini del risultato.
- *Curve / Circle / Tangent to Curves*, per disegnare le circonferenze cercate; il problema è determinato giacché sono note le due curve tangenti (due raggi della sfera) e il passaggio per uno dei punti intersezione  $T$ .

## 4.15 Costruzione della retta $p$ polare del punto $P$ rispetto al cerchio

Sia dato un cerchio e conduciamo due secanti qualsiasi  $PCV$  e  $PUA$  da un punto  $P$  esterno ad esso (figura 4.23). Tracciamo le due secanti passanti per i punti  $CU$  e  $AV$  fino a farle incontrare nel punto  $M$ . Tracciamo le diagonali  $AC$  e  $UV$  e individuiamo il

punto **L**. Tracciamo la retta **p** passante per i punti **ML**. Conduciamo le tangenti al cerchio nei punti **C** e **V** e nei punti **U** e **A**, le rispettive s'incontreranno nei punti **B** e **H** appartenenti alla retta **p**.

Osservando la costruzione è possibile trovare la retta **p** con un procedimento diverso: dal punto **P** conduciamo una secante il cerchio nei punti **C** e **V**. Tracciamo le tangenti in **C** e in **V** fino a farle intersecare nel punto **B**. Troviamo il coniugato armonico **T** di **P** rispetto a **C**, **V**. Allora la retta **p** è determinata dai punti **B** e **T**. La stessa retta può essere determinata indipendentemente con un'altra qualsiasi secante come la retta **PUA**, di fatto le forme **PTCV** e **PKUA** sono armoniche.

La retta **p** si chiama polare di **P** rispetto al cerchio e può essere determinata semplicemente unendo i due punti **F**, **G** di contatto delle tangenti esterne condotte dal punto **P**<sup>8</sup>.

La retta polare può essere definita come:

- la retta formata dai coniugati armonici di **P** rispetto ai punti in cui la secante per **P** taglia il cerchio;
- la retta formata dai punti diagonali dei quadrangoli inscritti al cerchio in cui due vertici opposti sono allineati con **P**;
- la retta formata dai punti intersezione delle tangenti condotte alla circonferenza nei punti staccati su di essa dalle secanti che escono da **P**.

La polare di un punto che appartiene alla circonferenza è la tangente nel punto stesso. Inoltre la retta **p** polare è perpendicolare al diametro del cerchio passante per il punto **P**.

Quando il punto **P** è esterno al cerchio, il modo più facile per determinare la retta polare è trovare i due punti di contatto delle tangenti condotte da **P**:

#### thinkdesign

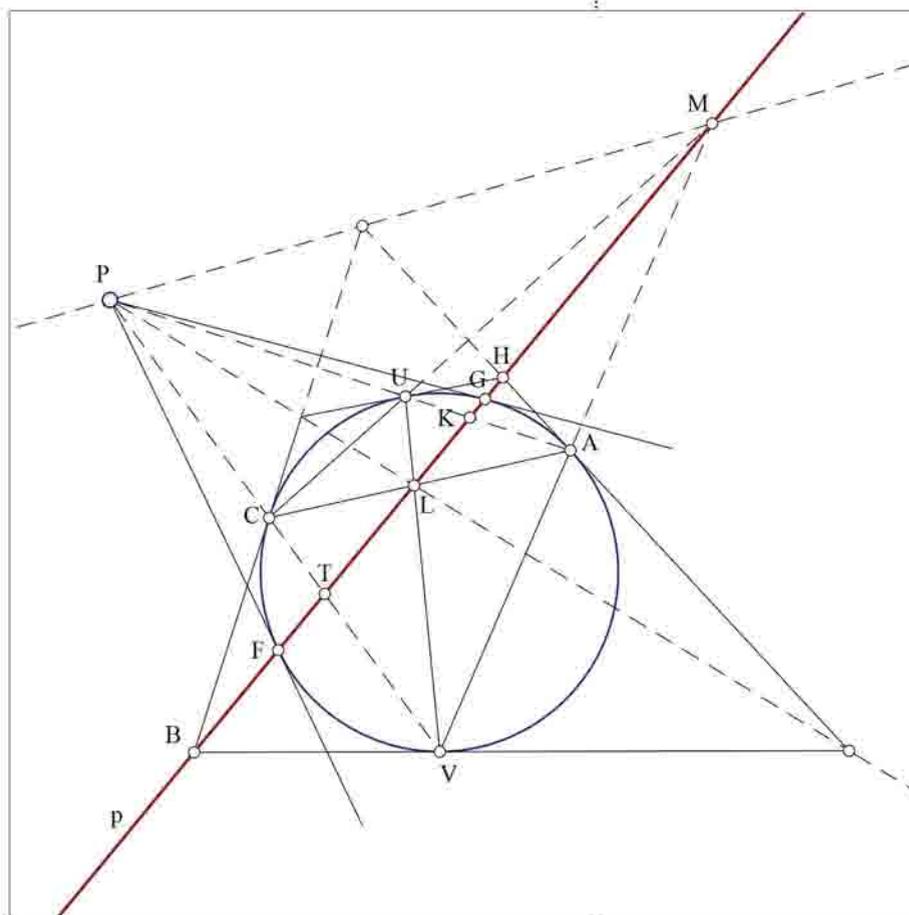
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la retta tangente dal punto **P** al punto di contatto con

il cerchio; si ripete la costruzione per la seconda tangente.

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la retta polare **p** di **P** rispetto al cerchio unendo i due punti di contatto.

**Fig. 4.23** Costruzione della retta **p** polare del punto **P** rispetto al cerchio. Se il punto **P** è esterno al cerchio basta tracciare le tangenti dal punto **P** al cerchio. La retta polare **p** passa per i due punti di contatto **F** e **G**

<sup>8</sup> F. Aschieri, *Geometria Proiettiva*, Hoepli, Milano 1886, cap. 14, par. 1, p. 114.



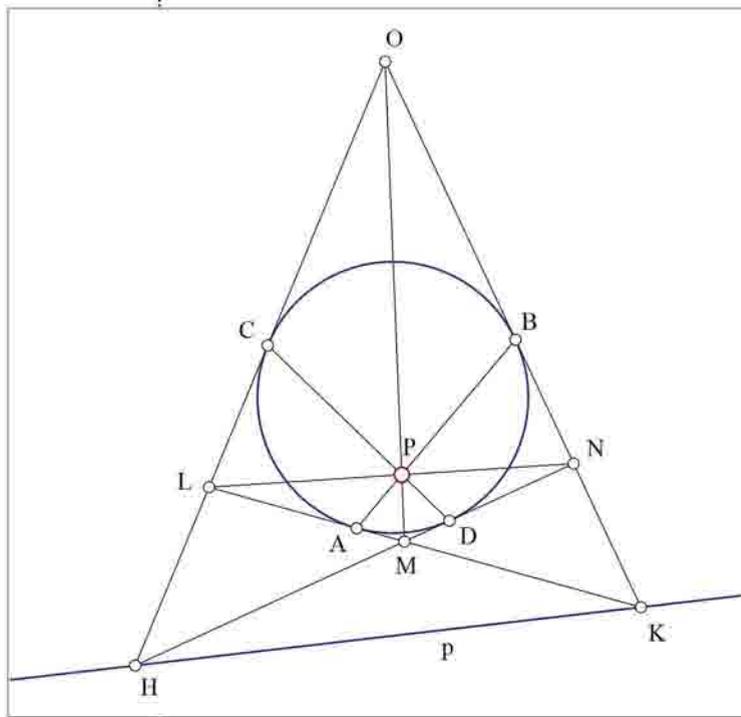
**Fig. 4.23**

**Fig. 4.24** Costruzione del punto **P** detto polo della retta **p** rispetto al cerchio. Dalla retta **p** si prendono due punti qualsiasi purché esterni al cerchio, **H** e **K**. Si costruiscono le rispettive polari **AB** e **CD**. L'intersezione delle due polari dà il punto **P** polo della retta **p**

#### 4.16 Costruzione del punto **P** detto polo della retta **p** rispetto al cerchio

Siano dati una retta **p** e una circonferenza. Prendiamo due punti **H** e **K** sulla retta **p** e costruiamo le due coppie di tangenti al cerchio (figura 4.24). Le due diagonali **OM** e **LN** del quadrilatero formato dalle coppie di tangenti e le due rette che uniscono i punti di contatto **AB** e **CD** s'incontrano in uno stesso punto **P**. Il punto **P** potrebbe essere individuato anche solo per mezzo del punto **H**, costruendo il fascio armonico di rette che passano per i punti **KPMO**.

Il punto **P** è detto il polo della retta **p** rispetto al cerchio e può essere definito come:



**Fig. 4.24**

- il punto dove si tagliano le coniugate armoniche della retta **p** rispetto alle coppie di tangenti al cerchio condotte dai punti appartenenti a **p**;
- il punto intersezione delle diagonali dei quadrangoli circoscritti al cerchio e aventi i lati incidenti in punti appartenenti a **p**;
- il punto dove s'incontrano le rette che uniscono i punti di contatto delle tangenti condotte dalla retta **p**.

Il polo di una retta tangente al cerchio è il punto di contatto stesso.

In virtù di quanto è stato detto, dato un cerchio, a ogni punto del piano corrisponde una retta polare e viceversa a ogni retta corrisponde un polo. Esiste una corrispondenza univoca fra i punti e le rette del piano che si dicono polari reciproche rispetto al cerchio. Resta valido il principio di dualità nel piano, per cui a una retta punteggiata armonica corrisponde un fascio armonico di rette che passa per il punto polare della retta punteggiata. Le due forme sono proiettive. Se un punto percorre una retta **p**, la retta polare corrispondente ruota attorno al polo **P** della retta percorsa, cioè descrive un fascio di raggi che ha per centro il polo della retta (figura 4.25).

Costruzione del polo di una retta rispetto a un cerchio:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la retta tangente dal punto **H** al punto di contatto con il cerchio **D**; si ripete la costruzione per la seconda tangente **HC**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la retta polare **DC** di **H** rispetto al cerchio unendo i due punti di contatto. Si ripete la costruzione per un altro punto **K** della retta data.
- *Inserisci / Punto / Su intersezione di curve / superfici*, costruisce il punto polo **P** intersezione delle diagonali **DC** e **AB**.

## 4.17 Costruzione del triangolo polare rispetto a un cerchio

Dati due punti e un cerchio, se l'uno giace sulla retta polare dell'altro e viceversa oppure, se date due rette e un cerchio l'una passa per il polo dell'altra, i punti e le rette in questa particolare posizione si dicono *armonici* o *coniugati* rispetto al cerchio.

Un *triangolo coniugato* o *polare* rispetto al cerchio è formato dai poli dei lati opposti, che sono i vertici del triangolo. Dato un cerchio, costruire un triangolo polare è semplice (figura 4.26): si prende un punto **A** qualsiasi del piano e si costruisce la polare **a** (vedi paragrafo 4.5 della seconda parte). Da un punto **B** della polare **a** così disegnata si trova la retta polare **b** corrispondente. Le due rette polari s'intersecano nel polo **C** dello spigolo **c** passante per i due punti **A** e **B**. Il triangolo **ABC** è un triangolo polare. In un quadrangolo completo inscritto nel cerchio e in un quadrilatero completo circoscritto al cerchio, il triangolo diagonale è un triangolo polare, se i lati del quadrilatero sono le tangenti nei vertici del quadrangolo, e i loro triangoli diagonali coincidono in unico triangolo polare.

Sia dato un cerchio si costruisca il quadrangolo inscritto **ABCD** (figura 4.27). I punti **EFG** dove si segano le diagonali e i lati opposti si dicono *punti diagonali*. Il triangolo formato dai tre punti diagonali è chiamato *triangolo diagonale*. La polare del punto **F** rispetto al cerchio è la retta **GE**, così come **FE** è la polare di **G** e **FG** è la polare di **E**. Quindi il triangolo **EFG** è un triangolo polare. È facile verificare che **EFG** è il triangolo diagonale e polare anche del quadrilatero circoscritto **abcd**.

### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce il quadrangolo **ABCD** inscritto nel cerchio, lo snap *punto su curva* individua un punto scelto sulla curva selezionata.

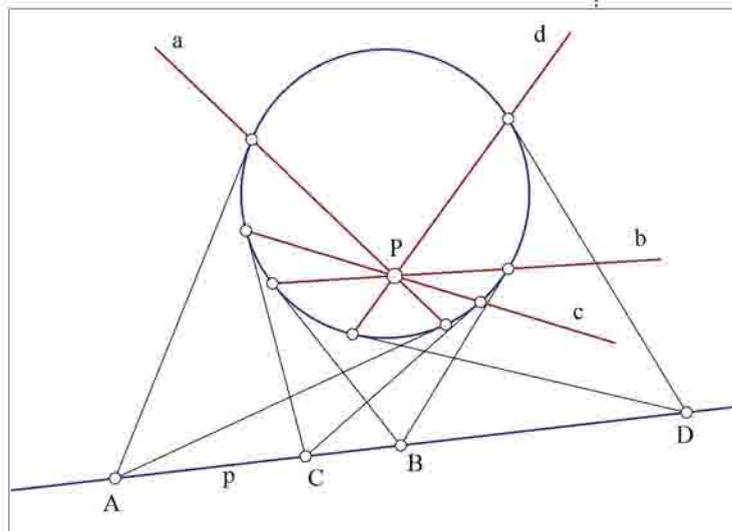


Fig. 4.25

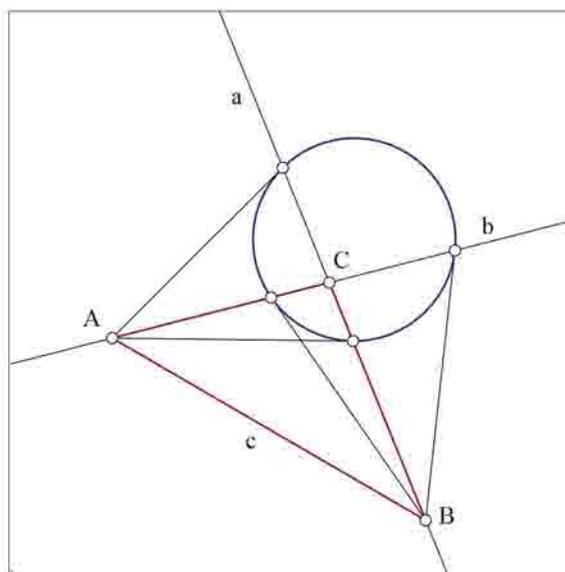
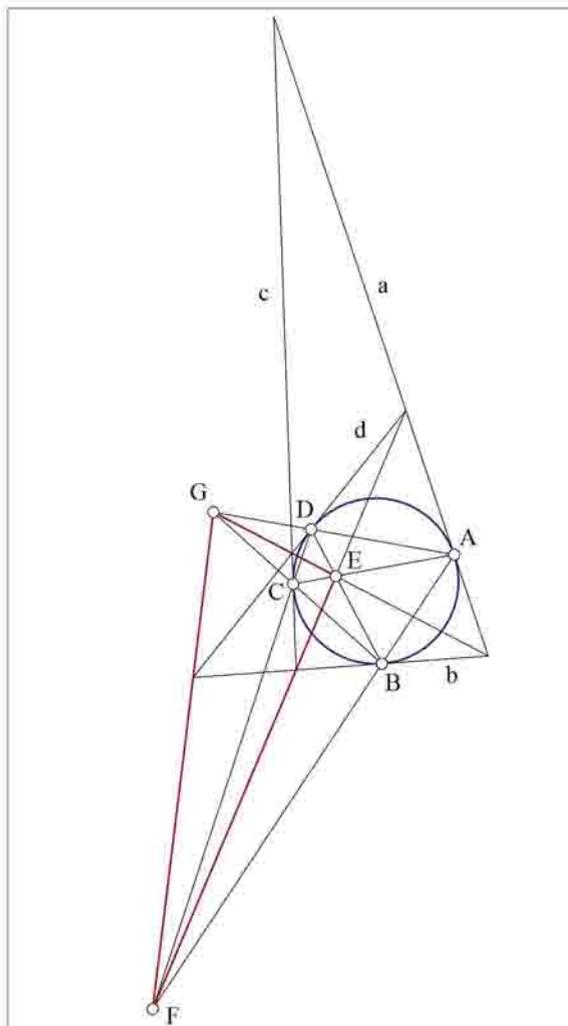


Fig. 4.26

**Fig. 4.25** Se un punto percorre una retta **p**, la retta polare corrispondente ruota attorno al polo **P** della retta percorsa, cioè descrive un fascio di raggi che ha per centro il polo della retta. Dunque una punteggiata armonica **ABCD** ha come corrispettivo un fascio armonico **abcd**

**Fig. 4.26** Costruzione del triangolo polare rispetto a un cerchio. Da un punto **A** tracciamo la rispettiva polare **a** al cerchio. Da un punto **B** sulla retta **a** tracciamo la rispettiva polare **b**. Il triangolo **ABC** è un triangolo polare.

**Fig. 4.27** In un quadrangolo completo inscritto in un cerchio e in un quadrilatero completo circoscritto in uno stesso cerchio, il triangolo diagonale è un triangolo polare, se i lati del quadrilatero sono le tangenti nei vertici del quadrangolo, e i loro triangoli diagonali coincidono in unico triangolo polare



**Fig. 4.27**

- *Modifica / Aggiusta curve*, estende gli estremi delle rette dei lati opposti del quadrangolo fino ai punti d'intersezione **F** e **G**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce il triangolo diagonale passante per i punti diagonali **E**, **F** e **G**.

<sup>9</sup> Cfr. Aschieri, *Geometria*, cit., cap. 14, par. 6, p. 119.

- *Strumento / Disegno / Info/Analisi / Locale*, costruisce le tangenti **abcd** nei punti **ABCD** del cerchio selezionato.
- *Modifica / Aggiusta curve*, estende gli estremi delle rette dei lati opposti del quadrilatero fino ai punti d'intersezione.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce le tre diagonali del quadrilatero completo **abcd** unendo i vertici opposti;
- *Inserisci / Punto / Su intersezione di curve/superfici*, costruisce i tre punti che individuano le diagonali; è possibile verificare che i punti trovati coincidono con i punti **EFG**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce i lati del triangolo polare **EFG**.

#### 4.18 Costruzione del parallelogramma inscritto nel cerchio, del parallelogramma circoscritto al cerchio e di due suoi diametri coniugati

Due rette che passano l'una per il polo dell'altra si dicono *rette coniugate*<sup>9</sup>. Due diametri che passano l'uno per il polo dell'altro si dicono anch'essi coniugati. Un diametro, infatti, non è altro che la retta polare di una direzione del piano (o «punto all'infinito») come il centro è il polo di una giacitura (o «retta all'infinito»). Quando due diametri sono coniugati vuol dire che ognuno passa nel polo dell'altro. Questa condizione nel cerchio determina che i diametri coniugati siano sempre perpendicolari fra loro. Un diametro coniugato taglia a metà tutte le corde parallele all'altro diametro e viceversa. Le tangenti agli estremi di un diametro coniugato sono parallele al diametro stesso. Perciò: in un parallelogramma **pqrs** circoscritto al cerchio, le diagonali sono sempre due diametri coniugati che si tagliano nel centro del cerchio **C** (figura 4.28); un parallelogramma **PQRS** inscritto nel cerchio è sempre un rettangolo in cui le

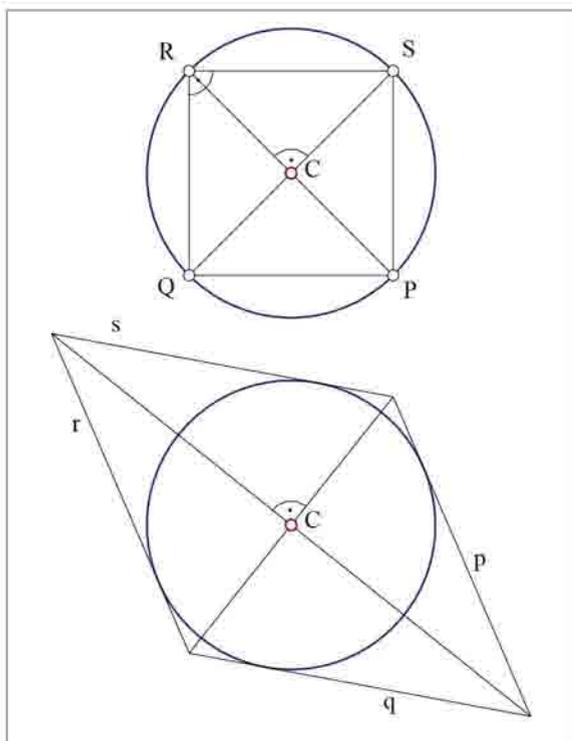


Fig. 4.28

diagonali si tagliano sempre nel centro  $C$  e i lati sono paralleli a due diametri coniugati.

Costruzione del parallelogrammo circoscritto al cerchio:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, da un punto esterno qualsiasi alla circonferenza conduciamo due tangenti  $p$  e  $q$  al cerchio.
- *Inserisci / Disegno / Linea / Parallele*, costruiamo il diametro coniugato che passa per il centro  $C$  e per il punto intersezione degli spigoli  $pq$ ; sappiamo che le diagonali del parallelogrammo sono due diametri coniugati e quindi sono perpen-

dicolari fra loro. Allora basta costruire l'altro diametro coniugato per  $C$  perpendicolare al primo, e i punti intersezione con i lati  $p$  e  $q$  daranno i vertici del parallelogrammo circoscritto. Disegniamo, infine, i lati  $r$  e  $s$ , passanti per i vertici trovati, paralleli ai lati  $p$  e  $q$ .

Costruzione del parallelogrammo inscritto:

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, da un punto del cerchio  $P$  tracciamo una corda qualsiasi  $PQ$ .
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, dal punto  $Q$  disegniamo un diametro coniugato  $QS$ . Sappiamo che questo dovrà passare per il centro  $C$ .
- *Inserisci / Disegno / Linea / Parallele*, dal punto  $S$  conduciamo la parallela  $SR$  a  $PQ$ .
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruiamo gli spigoli rimanenti; è possibile verificare che il parallelogrammo inscritto è un rettangolo.

### 4.19 Costruzione dell'ellisse dati una coppia di diametri coniugati

I programmi per la rappresentazione matematica consentono di costruire una conica a partire da una coppia di diametri coniugati. Tuttavia, bisogna disegnare la curva in quattro parti, considerando, di volta in volta, tre estremi dei diametri e due tangenti a detti estremi. Esiste, però, una soluzione più semplice, suggerita da Riccardo Migliari, che fa uso delle proprietà proiettive del cerchio (figura 4.29). Dati, infatti, una coppia di diametri coniugati, si costruisce la prospettiva che lega questi diametri agli assi perpendicolari di un cerchio nello spazio e si genera poi l'ellisse per proiezione: il modellatore *thinkdesign* riconosce questa curva come ellisse. Il procedimento può essere esteso alla parabola e all'iperbole, evitando di proiettare i punti del cerchio che corrispondono ai punti all'infinito delle due co-

Fig. 4.28 Costruzione del parallelogrammo inscritto nel cerchio, del parallelogrammo circoscritto al cerchio e di due suoi diametri coniugati. Le diagonali sono diametri coniugati. Un parallelogrammo inscritto è sempre un rettangolo

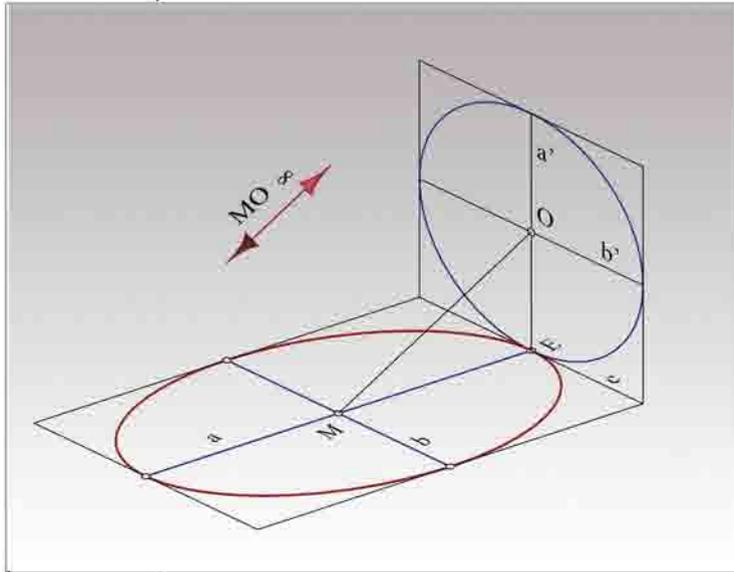


Fig. 4.29

**Fig. 4.29** Costruzione dell'ellisse dati una coppia di diametri coniugati. Si costruisce la prospettiva che lega questi diametri agli assi perpendicolari di un cerchio (anch'essi diametri coniugati del cerchio) e si genera poi l'ellisse per proiezione

niche, poiché questa operazione genererebbe un errore di calcolo.

#### thinkdesign

- *Modifica / Sposta/copia*, copia il diametro **b** dal punto medio **M** al punto estremo **E** dell'altro diametro **a**. Indichiamo questa copia di **b** con la lettera **c**.

Si costruisce poi un cerchio, di diametro eguale a **b**, su un piano qualsiasi che, per comodità, può essere assunto verticale e passante per il diametro **c**.

- *Modifica / Piano di lavoro / Sposta*, sposta il piano di lavoro nel punto **E**.
- *Modifica / Piano di lavoro / Allinea asse x*, allinea l'asse **x** con il diametro **c**.
- *Modifica / Piano di lavoro / Seleziona*, consente di ruotare il piano in posizione verticale.

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 punti*, consente di disegnare l'asse coniugato **a'** di lunghezza pari al diametro **b** dato dell'ellisse.
- *Modifica / Sposta / copia*, copia il diametro **c** dal punto **E** al punto medio **O** di **a'**. Indichiamo la copia del diametro con la lettera **b'**.
- *Inserisci / Disegno / Cerchi e archi / Centro*, consente di disegnare il cerchio di centro **O** e diametri **a'** e **b'**, che per costruzioni hanno lunghezza pari a **b**.

Ora è sufficiente proiettare il cerchio di centro **O** secondo la direzione data dalla retta **OM**, che unisce i centri delle due curve corrispondenti nella prospettiva.

- *Inserisci / Curva / Proietta*, consente di costruire la curva proiezione del cerchio sul piano individuato dai diametri dati **a** e **b**, secondo la direzione **OM**. È possibile verificare che il modellatore riconosce tale curva come un'ellisse: quella individuata dai due diametri coniugati dati.

#### 4.20 Costruzione di un esagono semplice inscritto e circoscritto a un cerchio e rispettivamente della retta **r** di Pascal e del punto **P** di Brianchon

Siano **A B C D E F** sei punti presi a piacere su una circonferenza (figura 4.30). Unendo in successione i sei punti si ottiene un *esagono semplice* inscritto nella circonferenza. Il *Teorema di Pascal* afferma che, dato un esagono inscritto in un cerchio, i punti **L, M** e **N**, nei quali si incontrano le tre coppie dei lati opposti, sono allineati lungo una stessa retta **r**. Per questa ragione ogni esagono semplice inscritto nel cerchio viene detto *esagono di Pascal*.

Siano **A B C D E F** i sei vertici di un esagono semplice circoscritto a un cerchio dato. Il *Teorema di Brianchon*, correlativo del teorema di Pascal, affer-

ma che, dato un esagono circoscritto al cerchio, le linee congiungenti le coppie di vertici opposti s'incontrano in un medesimo punto **P**. Per questa ragione, ogni esagono semplice circoscritto al cerchio è un *esagono di Brianchon*.

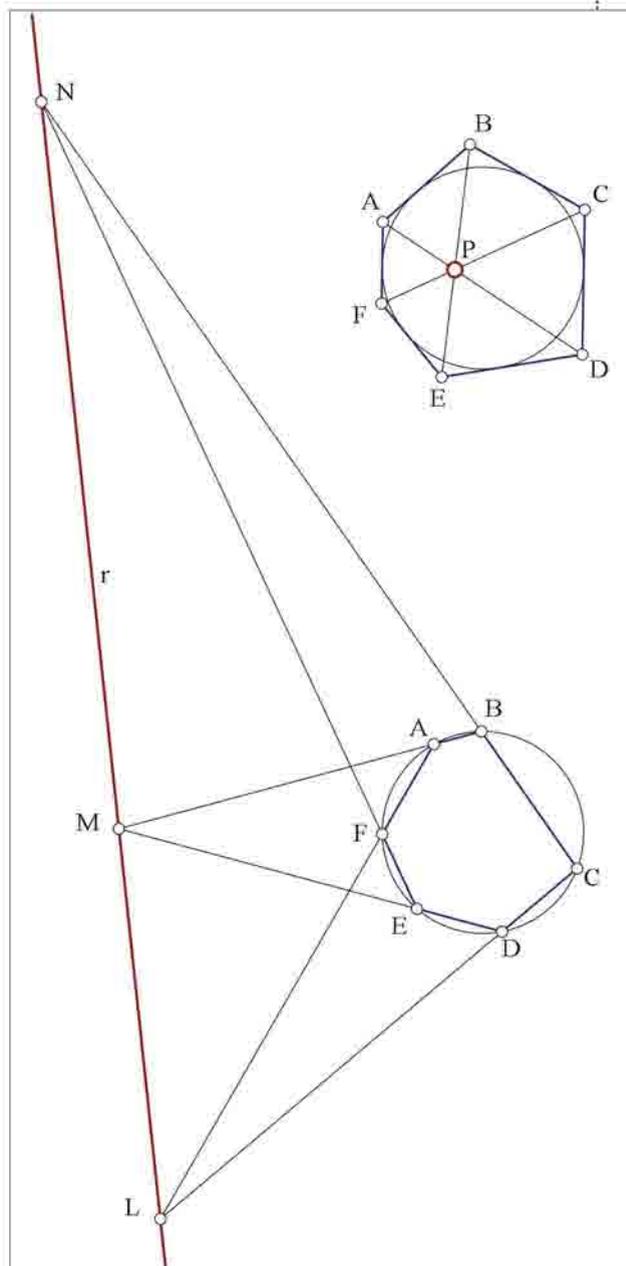
Le proprietà dell'esagono, descritte dai teoremi di Pascal e Brianchon, sono grafiche, perciò sono invarianti proiettive: ciò significa che le suddette proprietà sussistono anche per l'esagono che è inscritto o circoscritto a una proiezione del cerchio, cioè a una conica.

### thinkdesign

- *Inserisci / Punto / Su curve*, consente di assegnare i sei punti lungo la circonferenza.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la retta unione dei punti selezionati; in questo modo costruiamo l'esagono per i sei punti.
- *Modifica / Aggiusta curve*, consente di estendere le linee selezionate fino al loro punto d'incontro; s'individuano i tre punti **L**, **M** e **N** che sono allineati sulla retta **r** di Pascal dell'esagono inscritto.

Per costruire l'esagono circoscritto è possibile utilizzare il comando *Linea / 2 Punti*: selezionare per primo un punto esterno al cerchio e come secondo punto selezionare, attraverso lo strumento *Snap / Tangente*, un punto sul cerchio. Costruite le sei rette tangenti al cerchio basta, attraverso il comando *Modifica / Aggiusta curve* individuare i sei vertici dell'esagono.

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce le tre rette unione dei vertici opposti dell'esagono.
- *Inserisci / Punto / Su curve*, consente d'individuare il punto **P** intersezione delle tre rette individuate dell'esagono circoscritto.



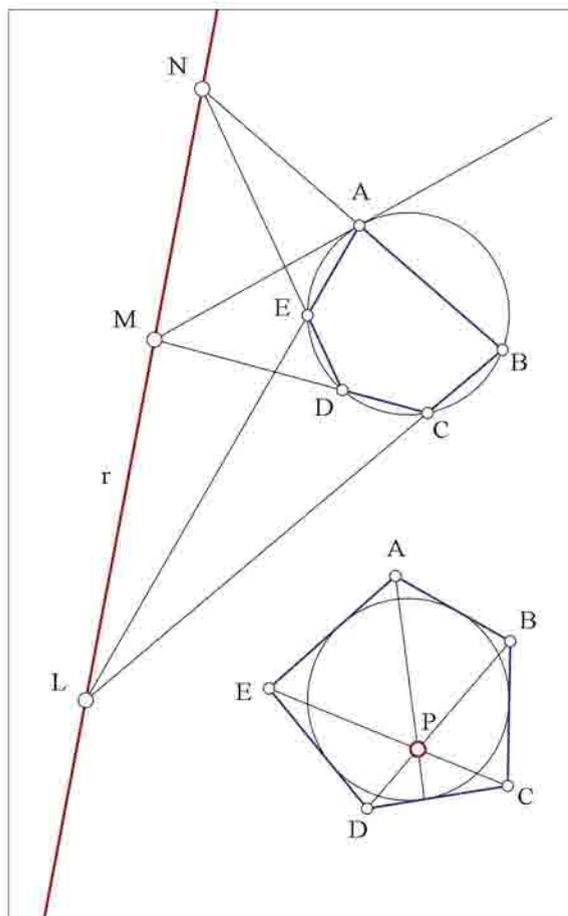
**Fig. 4.30** Costruzione di un esagono semplice inscritto e circoscritto a un cerchio e rispettivamente della retta **r** di Pascal e del punto **P** di Brianchon

**Fig. 4.30**

**Fig. 4.31** Costruzione di un pentagono semplice inscritto in un cerchio, di un pentagono semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive

#### 4.21 Costruzione di un pentagono semplice inscritto in un cerchio, di un pentagono semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive

Consideriamo un esagono di Pascal e immaginiamo che un vertice, ad esempio il punto **B**, scorra sulla circonferenza fino a coincidere con un vertice



**Fig. 4.31**

contiguo, ad esempio **A** (figura 4.31): con questo movimento l'esagono si trasforma in un *pentagono semplice* e il lato **AB** dell'esagono nella tangente al cerchio nel vertice **A** del pentagono. Il *Teorema di Pascal* afferma che, in un pentagono inscritto in un cerchio, la tangente in un vertice e il lato opposto, e le altre due coppie di lati non consecutivi s'incontrano in tre punti allineati **L**, **M** e **N** sulla stessa retta **r**.

Per analogia con il Teorema di Brianchon, in un pentagono semplice circoscritto a un cerchio la retta che unisce un vertice con il punto di contatto del lato opposto, e le rette che uniscono le altre due coppie di vertici non consecutivi s'incontrano in uno stesso punto **P**.

- **thinkdesign** La costruzione è simile a quella precedente.

#### 4.22 Costruzione di un quadrangolo semplice inscritto in un cerchio, di un quadrangolo semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive

Se un vertice del pentagono suddetto scorre sulla circonferenza circoscritta fino a sovrapporsi su un vertice contiguo (figura 4.32), il pentagono si muta in un quadrangolo e il lato nella relativa tangente al cerchio. Si verifica allora quanto segue: in un *quadrangolo semplice* inscritto in un cerchio le coppie di lati opposti e le coppie di tangenti dei vertici opposti si segano in punti allineati su una stessa retta **r**.

Come teorema duale avremo che: in un quadrilatero semplice circoscritto al cerchio le diagonali e le rette che uniscono i punti di contatto dei lati opposti si segano in uno stesso punto **P**.

- **thinkdesign** La costruzione è simile a quella precedente.

#### 4.23 Costruzione del triangolo semplice inscritto in un cerchio, di un triangolo semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive

Se supponiamo che tre vertici consecutivi di un esagono semplice inscritto in un cerchio vengano a coincidere, allora avremo un *triangolo semplice* (figura 4.33). Il triangolo può essere considerato un altro caso limite dell'esagono di Pascal e di Brianchon. Per cui, in un triangolo  $A, B, C$  inscritto in un cerchio, le tangenti ai vertici e i lati opposti si tagliano in tre punti  $P, Q, R$  di una stessa retta  $r$ . Viceversa in un trilatero  $a, b, c$  circoscritto a un cerchio le rette che uniscono i vertici coi punti di contatto  $A, B, C$  dei lati opposti individuano uno stesso punto  $O$ .

- **thinkdesign** La costruzione è simile a quella precedente.

#### 4.24 Costruzione della conica per cinque punti dati

Le coniche, come l'ellisse, la parabola o l'iperbole, si possono generare proiettando un cerchio. Perciò le coniche, come il cerchio, sono determinate dalla intersezione di due fasci proiettivi nel piano<sup>10</sup>: su un cerchio assegniamo due punti qualsiasi  $S$  e  $S'$  e da questi proiettiamo tre ulteriori punti  $A, B, C$  (figura 4.34). Per una nota proprietà del cerchio le rette proiettanti corrispondenti, come  $a$  e  $a'$  o  $b$  e  $b'$ , formano lo stesso angolo di ampiezza  $\alpha$ , perché capaci dello stesso arco di circonferenza. I due fasci di rette che proiettano i punti della circonferenza sono in corrispondenza omografica. Quindi proiettando da due punti fissi del cerchio un punto variabile su di esso si ottengono due fasci proiettivi. Se si considera il raggio comune proiettivo  $s$  che passa per i due centri, questo ha come corrispettivo nell'altro fascio la tangente  $s'$  al cerchio nel punto  $S'$  proiettato (vi-

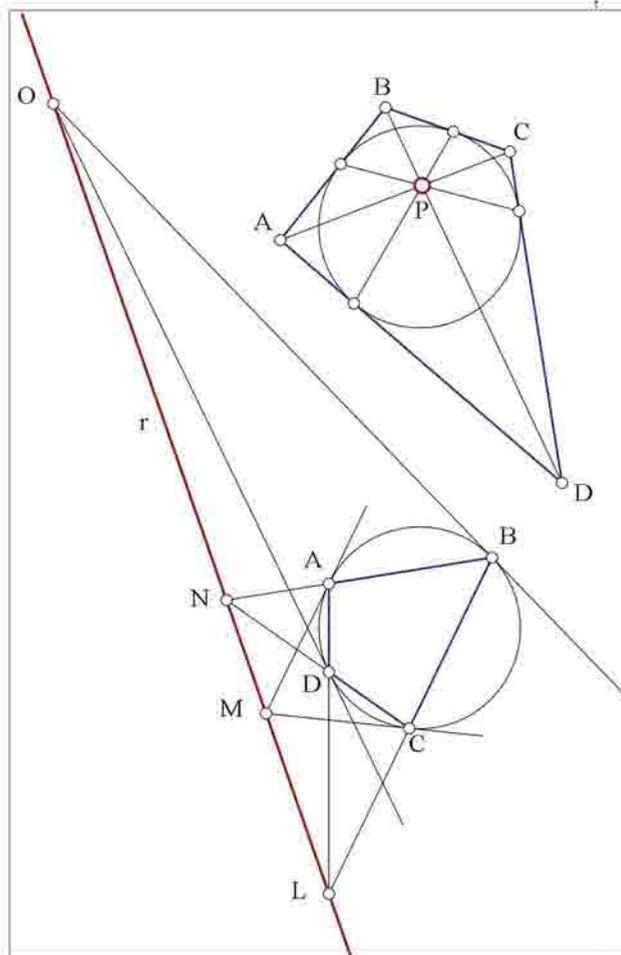


Fig. 4.32

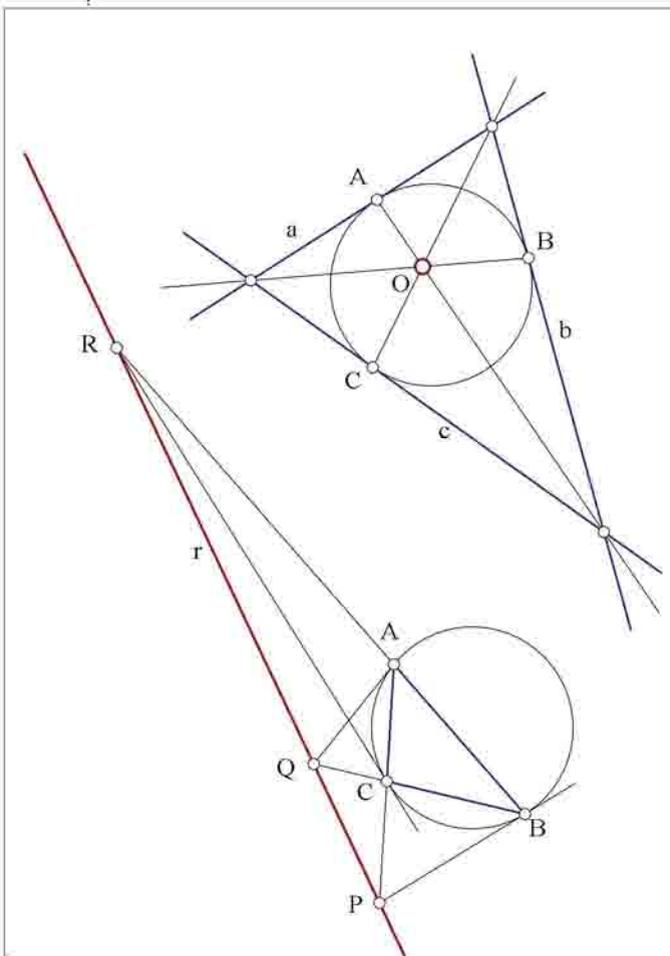
ceversa se si considera il punto  $S$  come punto proiettato si deve prendere la tangente in questo punto). La corrispondenza proiettiva tra forme di prima specie è determinata da tre coppie di elementi corrispondenti (si veda, ad esempio, nel capitolo 1 della prima parte, la costruzione della proiettività tra punteggiate), di conseguenza, *cinque punti nel*

Fig. 4.32 Costruzione di un quadrangolo semplice inscritto in un cerchio, di un quadrangolo semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive

<sup>10</sup> M. Docchi, R. Migliari, *Scienza della Rappresentazione – Fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva*, La Nuova Italia Scientifica, Roma 1992, cap. 1, par. 1.10.2, p. 38.

**Fig. 4.33** Costruzione del triangolo semplice inscritto in un cerchio, di un triangolo semplice circoscritto a un cerchio e loro proprietà proiettive

**Fig. 4.34** Proiettando da due punti fissi  $S$  e  $S'$  del cerchio un punto variabile su di esso si ottengono due fasci proiettivi. Questa è una proprietà proiettiva del cerchio che appartiene anche alle coniche

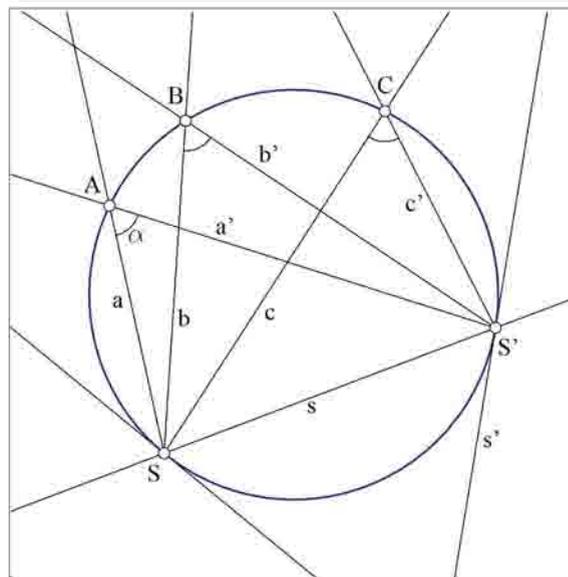


**Fig. 4.33**

<sup>11</sup> H.S. MacDonald Coxeter, *Projective Geometry*, Springer, Berlino, seconda edizione 2003. La prima edizione di questo libro è stata pubblicata dalla Blaisdell Publishing Company nel 1964. La seconda edizione è stata pubblicata dalla University of Toronto Press nel 1974. Nel libro c'è un paragrafo (11.1) che s'intitola *Is the Circle a Conic?*: «The attentive reader must have noticed that most of the conics appearing in our figures look like something that has been familiar ever since he first saw the full moon: they look like circles. This observation raises the important question: *is the circle a conic?* We can answer *Yes* as soon as we have found a characteristic property of a conic that is also a property of the familiar circle».

piano, di cui tre non in linea retta, determinano un'unica conica passante per essi. Infatti, assumendo due di questi punti come centri, con gli altri tre si possono costruire due fasci di tre rette ognuno.

Le proprietà proiettive del cerchio possono quindi essere estese alle coniche<sup>11</sup>. In particolare possiamo verificare i teoremi di Pascal e Brianchon: *ogni esagono semplice inscritto in una conica è un esagono di*



**Fig. 4.34**

*Pascal*; e il suo duale, ogni esagono circoscritto a una conica è un esagono di Brianchon.

E anche per le coniche, come per il cerchio, sussistono i casi limite e, in particolare, il teorema: *se un pentagono è inscritto in una conica, la tangente in un punto e il lato opposto, e le coppie di lati non consecutivi, si segano nei punti di una stessa retta.*

Queste considerazioni permettono di costruire la conica che passa per cinque enti dati: cinque punti (o cinque tangenti); quattro punti e la tangente in uno di essi (o quattro tangenti e il punto di contatto di una di esse); tre punti e le tangenti di due di essi (o tre tangenti e i punti di contatto di due di esse).

Questo problema è di particolare interesse nella modellazione matematica, dove una conica può essere descritta con un'accuratezza uguale a quella di un cerchio. Considerato che i modellatori consentono di determinare una conica tramite tre punti e due tangenti, conviene riportare il problema sempre a questo caso.

Dati cinque punti **A**, **B**, **C**, **D**, **E** si costruisce il pentagono inscritto nella conica: è sufficiente unire i cinque punti in un ordine a piacere (figura 4.35)<sup>12</sup>. Il Teorema di Pascal, declinato nel caso del pentagono, consente la costruzione di una retta **a** tangente alla conica nel punto **A** considerato (vedi paragrafo 4.15 della seconda parte). Si può pensare il pentagono **ABCDE** inscritto nella figura: il lato **CD**, opposto ad **A**, deve segare la tangente in **A** in un punto **N** che appartiene alla retta individuata dai punti **L** e **M**, che sono comuni ai lati **BC**, **AE** e **AB**, **DE**, rispettivamente. Ripetendo questa costruzione è facile tracciare una seconda tangente alla conica, ad esempio la retta **e** tangente nel punto **E**.

I programmi per la rappresentazione matematica consentono appunto di costruire una conica dati tre punti e due tangenti, che, nel caso in esame, sono: **a**, **A**, **C**, **E**, **e**. La conica generata nell'esempio illustrato è una parabola.

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la spezzata che passa per i punti selezionati, ovvero il pentagono **ABCDE** di Pascal.
- *Modifica / Aggiusta curve*, consente di estendere le linee selezionate fino al loro punto d'incontro; sapendo che vogliamo determinare la tangente nel punto **A**, s'individuano, per prima cosa, i due punti **L** e **M** che sono allineati sulla retta **r** di Pascal del pentagono inscritto alla conica; in particolare il punto **L** è dato dall'intersezione dei lati **BC** e **AE**, mentre il punto **M** è dato dall'intersezione dei lati **AB** e **DE**.
- *Modifica / Aggiusta curve secondo limiti*, consente di estendere il lato **CD**, opposto al punto **A**, fino alla retta **r**; il punto d'intersezione è il punto **N**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, disegna la retta passante per i punti **N** e **A**, ovvero la tangente **a** nel punto **A** della conica.

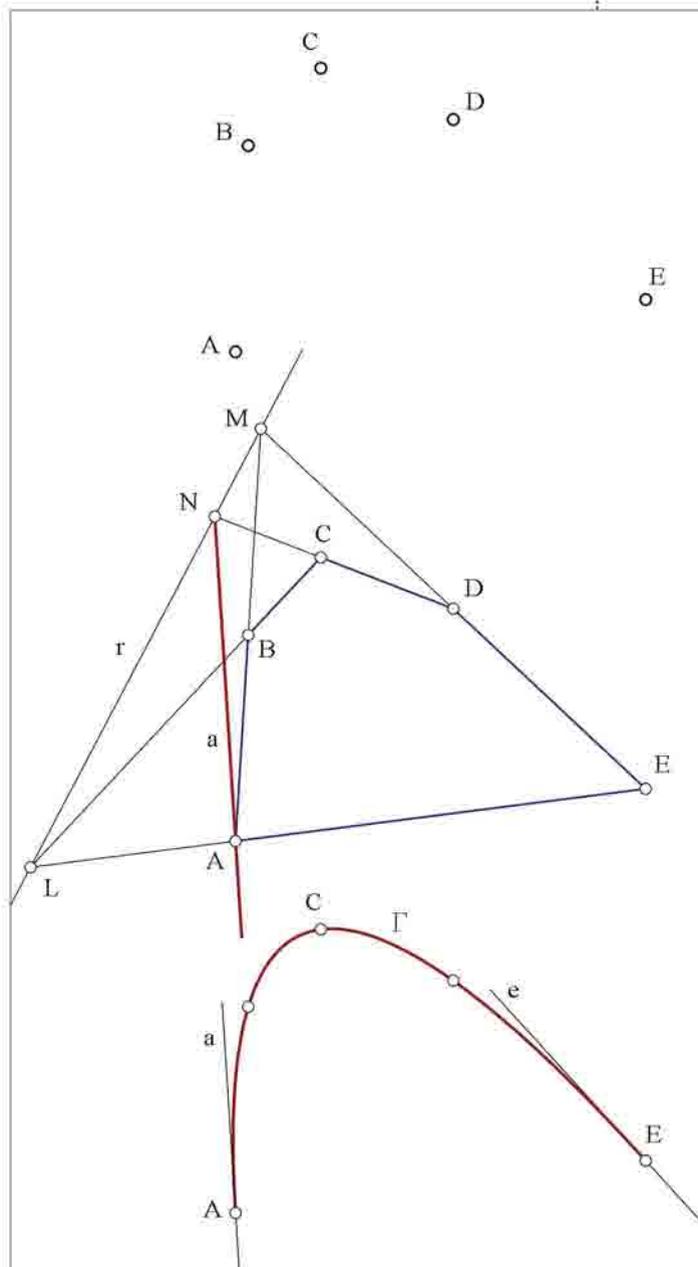


Fig. 4.35

Fig. 4.35 Costruzione della conica per cinque punti dati **A**, **B**, **C**, **D**, **E**

<sup>12</sup> Aschieri, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, cit., cap. V.

Fig. 4.36 Costruzione della conica per cinque tangenti **a**, **b**, **c**, **d**, **e**

La costruzione della tangente **e** nel punto **E** è analoga.

- *Inserisci / Curve / Coniche/Conica*, consente di disegnare la conica  $\Gamma$  che passa per i tre punti **A**, **C** ed **E** e ammette le tangenti **a** ed **e** nei punti omonimi.

#### 4.25 Costruzione della conica per cinque tangenti

Cinque rette in un piano determinano una conica. Per costruire la conica è necessario riportare il problema enunciato alla curva passante per tre punti e due tangenti. Per fare ciò si utilizza il teorema di Brianchon ridotto al pentagono. Questo teorema serve a determinare il punto di contatto di una qualsiasi delle tangenti che involuppano la conica cercata.

Siano date cinque rette **a**, **b**, **c**, **d**, **e** (figura 4.36) e si voglia determinare il punto di contatto **C** della retta **c**. Nel pentagono considerato in figura la retta che unisce il vertice **ae**, opposto a **C**, e il punto di contatto di **c**, e le altre due coppie di rette che uniscono i vertici opposti **ab**, **dc** e **cb**, **de**, si tagliano in uno stesso punto **O**. Per cui la retta che unisce il vertice **ae** con **O** segnerà la retta **c** nel punto di contatto **C**. Ripetendo la costruzione per altri due punti **A** e **B**, è possibile costruire la conica  $\Gamma$  tangente alle cinque rette date (attraverso il comando *conica per tre punti e due tangenti*). La conica soluzione nell'esempio è una parabola.

#### thinkdesign

- *Modifica / Aggiusta curve*, consente di estendere le linee selezionate fino al loro punto d'incontro; disegniamo il pentagono formato dalle linee **a**, **b**, **c**, **d**, **e**.

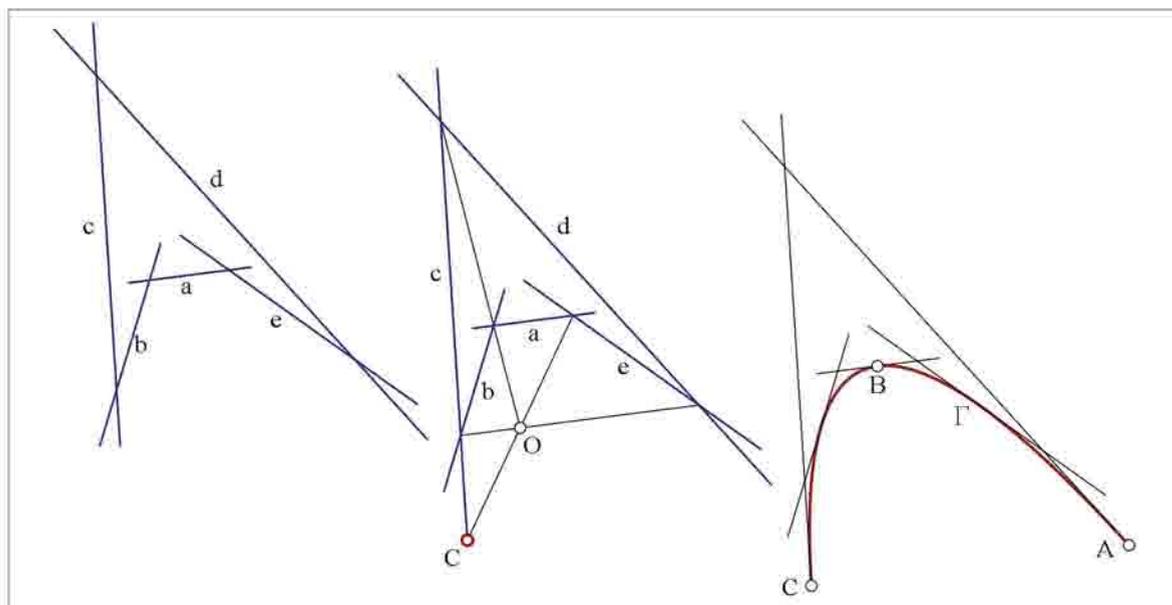


Fig. 4.36

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, disegna la retta passante per i vertici opposti  $ab$ ,  $dc$  e  $cb$ ,  $de$ ; le due rette individuano un punto  $O$ ; disegniamo la retta che passa per il punto  $O$  e il vertice  $ea$ .
- *Modifica / Aggiusta curve*, consente di estendere la retta suddetta fino al punto di contatto  $C$  con la retta  $c$ . La costruzione dei punti di contatto  $A$  e  $B$  è analoga al punto  $C$ .
- *Inserisci / Curve / Coniche/Conica*, consente di disegnare la conica  $\Gamma$  che passa per i tre punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  e ammette le tangenti  $a$  e  $d$ .

#### 4.26 Costruzione della conica per quattro punti e la tangente in uno di essi

Dati quattro punti di una curva conica e la tangente in uno di essi è possibile costruire la tangente in un altro dei tre punti dati. Per fare ciò applichiamo il teorema dell'esagono di Pascal al quadrilatero inscritto.

Siano dati i punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e la tangente  $a$  in  $A$  (figura 4.37). Vogliamo costruire la tangente  $c$  in  $C$ . Disegniamo un quadrilatero in modo da avere i punti  $A$  e  $C$  opposti. Le coppie di lati opposti  $AB$ ,  $CD$  e  $AD$ ,  $CB$  s'intersecano nei punti diagonali  $P$  e  $Q$ . I punti  $PQ$  individuano una retta in cui si tagliano le tangenti in  $A$  e  $C$ . Per cui la retta  $a$  taglia nel punto  $R$  la retta  $PQ$ . La tangente  $c$  in  $C$  è così determinata, perché è il segmento che unisce i punti  $CR$ . Nella figura i punti determinano un'ellisse, quindi è conveniente ripetere la costruzione per altri punti in modo da poter disegnare l'intera curva in tre tratti. È possibile, finalmente, costruire la conica che passa per i quattro punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e le tre tangenti  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce il quadrilatero  $ABCD$ .
- *Modifica / Aggiusta curve*, estende gli spigoli  $AD$  e

Fig. 4.37 Costruzione della conica per quattro punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e la tangente  $a$  in uno di essi

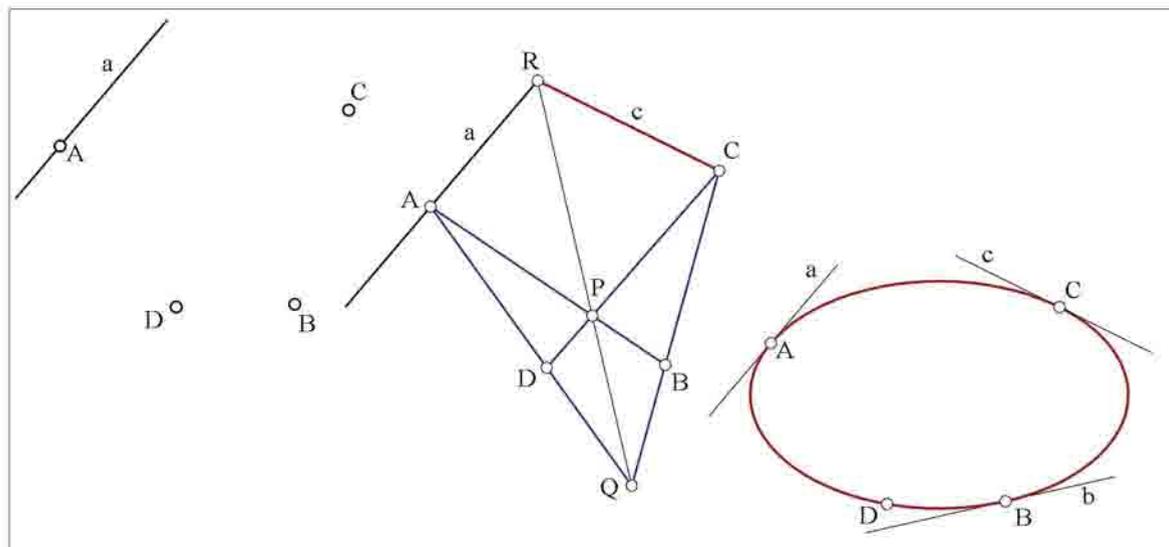


Fig. 4.37

**Fig. 4.38** Costruzione della conica per quattro tangenti **a, b, c, d** e il punto di contatto **A** in una di esse

**BC** per determinare il punto **Q**. Il punto **P** intersezione degli altri due lati già è determinato.

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la retta **PQ**. Sappiamo che le tangenti in **A** e in **C** si devono tagliare in un punto della retta **PQ**. Per cui prolunghiamo la tangente **a** fino a incontrare nel punto **R** la retta **PQ**. La tangente **c** in **C** è la retta che unisce i punti **CR**.

È possibile ripetere la costruzione per trovare un'altra tangente **b** nel punto **B**.

- *Inserisci / Curve / Coniche/Conica*, consente di disegnare la conica  $\Gamma$  che passa per i tre punti **A, B, D** e le tangenti **a** e **b**. Si ripete la costruzione per i rami che passano per i punti **A, C** e **B**.

#### 4.27 Costruzione della conica per quattro tangenti e il punto di contatto in una di esse

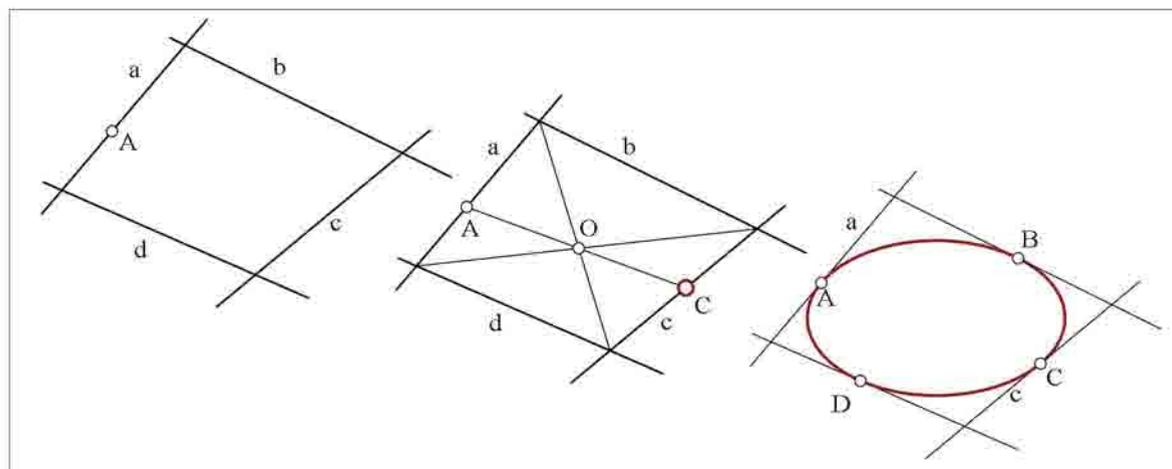
Date quattro rette d'involuppo e il punto di contatto di una di esse è possibile determinare il punto di

contatto di una delle tre rette tangenti. Utilizziamo il teorema dell'esagono di Brianchon applicato al quadrilatero.

Siano date quattro rette **a, b, c, d** e il punto **A** di contatto della retta **a** (figura 4.38). Vogliamo determinare il punto **C** di contatto della retta **c**. Si considera un quadrilatero formato dalle rette date in modo da avere i lati **a** e **c** opposti. Sappiamo che le diagonali di un quadrilatero si devono tagliare in un punto **O** in cui debbono tagliarsi le rette che uniscono i punti di contatto dei lati opposti. Una volta disegnate le due diagonali e determinato il punto **O**, è sufficiente unire il punto **A** con il punto **O** e la retta **AO** segnerà il lato **c** nel suo punto di contatto **C**. Si può ripetere la costruzione per trovare altri due punti di contatto **B** e **D**, in modo da poter disegnare la conica intera (che nel caso della figura è un'ellisse) che passa per i quattro punti **A, B, C, D** e le quattro tangenti **a, b, c, d**.

*thinkdesign*

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce le due diagonali del quadrilatero **abcd**, che indivi-



**Fig. 4.38**

duano il punto **O**. Dal punto **A** stacciamo il segmento che passa per il punto **O**. Questo interseca il lato opposto  $c$  nel punto di contatto **C** cercato.

Si ripete la costruzione per trovare gli altri due punti **B** e **D** di contatto. Ora possiamo disegnare la conica come curva per tre punti e due tangenti.

- *Inserisci / Curve / Coniche/Conica*, consente di disegnare la conica  $\Gamma$  che passa per i tre punti **A**, **B** e **C** e le tangenti  $a$  e  $c$ . Si ripete la costruzione per i rami che passano per i punti **A**, **D** e **C**.

#### 4.28 Dati cinque punti di una conica trovare un altro punto della conica

Siano dati cinque punti **A**, **B**, **C**, **D**, **E**. Vogliamo trovare un sesto punto **F** che appartiene alla conica individuata dalla cinquina di punti dati. Il teorema di Pascal consente di trovare un qualsiasi altro punto della conica  $\Gamma$ .

Questa costruzione è di apprezzabile efficacia nell'ambiente informatico in un caso particolare: quando i cinque punti sono dati a caso e appartengano sì a una conica, ma non allo stesso ramo della curva (ove questa sia digrammica); in altre parole quando i punti appartengono ai due rami dell'iperbole  $\Gamma$ . In questo caso, infatti, non sarà possibile tracciare la singola curva passante per i cinque punti dati perché non esiste. Esiste, invece, la conica iperbole che è sempre una figura omologica del cerchio ma è formata da due curve distinte e simmetriche. Nel caso appena descritto, alcuni dei cinque punti dati potranno appartenere al primo ramo dell'iperbole e gli altri, viceversa, al secondo. Per verificare la condizione descritta e costruire i due rami, occorrerà costruire i punti necessari per disporre di almeno tre punti per ogni ramo dell'iperbole. Ad esempio, se sono dati tre punti su un ramo e due su un altro, basta costruire un solo punto; se, invece,

sono dati quattro punti su un ramo e uno sull'altro, saranno necessari due nuovi punti. In questo modo per i sei o sette punti complessivi sarà possibile condurre i due rami dell'iperbole. Questa costruzione è uno strumento di verifica semplice e veloce della condizione descritta ed è un metodo rigoroso per determinare, attraverso il disegno, la conica individuata da cinque punti.

Sono dati cinque punti **A**, **B**, **C**, **D**, **E** (figura 4.39). Osservando la figura, è facile comprendere che per questi punti non può passare né un'ellisse, né una parabola e intuire che i punti **B**, **D** ed **E** appartengono a un ramo dell'iperbole e i punti **A** e **C** al ramo opposto. È altresì evidente che per costruire il ramo dell'iperbole che passa per **A** e per **C** occorre un sesto punto **F**. I cinque punti dati individuano uno dei possibili pentagoni di Pascal che ha per lati i segmenti **AB**, **BC**, **CD**, **DE**, **EA**. Inserendo una retta  $r$  arbitraria, che esce da uno dei cinque punti dati, e posto che a questa retta appartenga un sesto punto **F** della conica, il pentagono suddetto, si trasforma in uno degli infiniti esagoni di Pascal inscrivibili nella conica stessa. Posto che si vuole costruire un punto appartenente al ramo **AC** dell'iperbole, conduciamo per il punto **E** una retta  $r$ , che rappresenta un lato dell'esagono di Pascal. Partendo dal punto **E** costruiamo parte dell'esagono di Pascal di lati **EA**, **AB**, **BC**, **CD**. È importante nella scelta dell'esagono che i punti **E** ed **F** siano consecutivi (il verso non ha importanza).

Consideriamo ora il lato **AE** e il lato terzo consecutivo, suo opposto, che è il lato **CD**, sia che nel conteggio dei lati si segua il verso orario che quello antiorario. **AE** e **CD** sono dunque opposti e perciò si incontrano in un punto **P** della retta di Pascal. Consideriamo ora il lato  $r$ , uscente da **E** e il terzo consecutivo suo opposto, che è **BC**: questi due lati si incontrano in un punto **Q** della retta di Pascal, che resta così individuata: **PQ**. I due lati opposti dell'esagono, che ancora non abbiamo considerato, sono

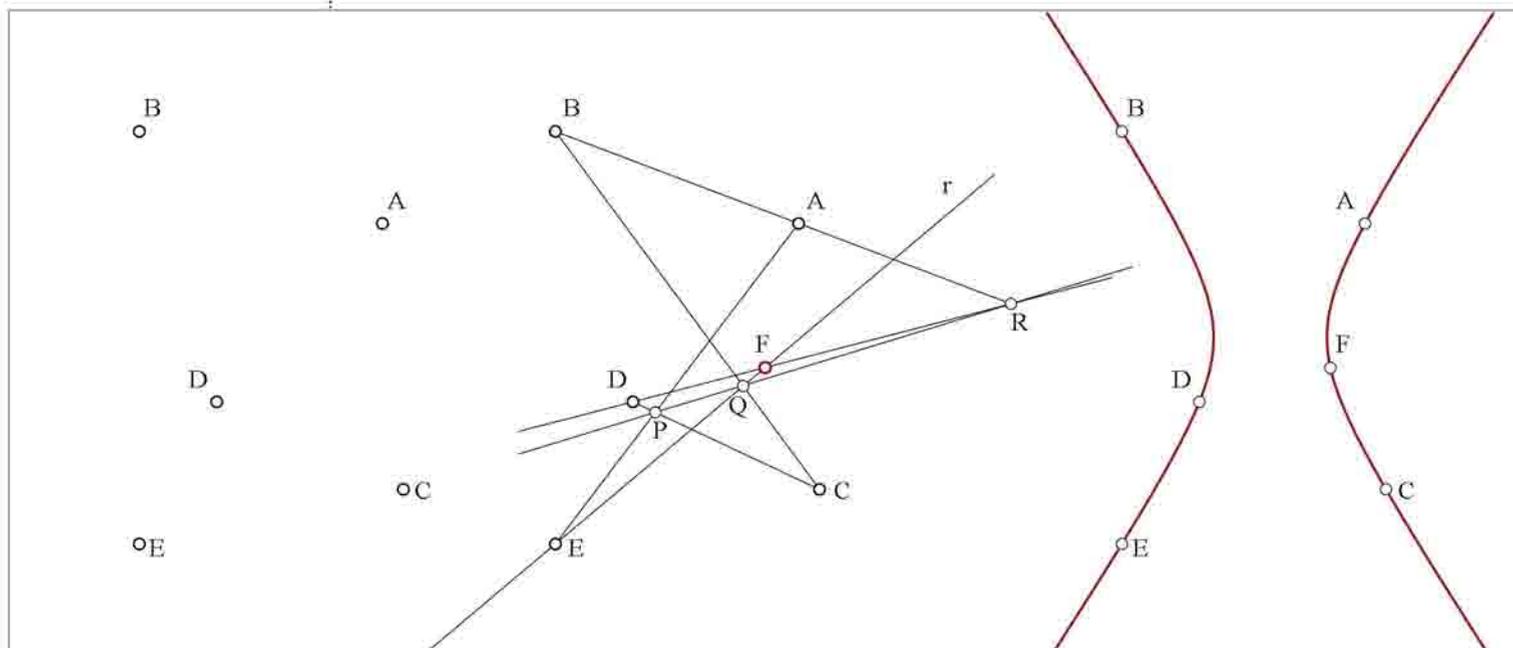


Fig. 4.39

Fig. 4.39 Dati cinque punti **A, B, C, D, E** di una conica trovare un altro punto **F** della conica e costruire la conica passante per i sei punti. Questa costruzione è utile quando i cinque punti dati individuano un'iperbole. Allora per disegnare la conica, cioè i due rami d'iperbole, conviene trovare un sesto punto **F** appartenente alla conica. In questo modo, avendo tre punti per ramo, è possibile tracciare i due rami dell'iperbole

**AB** e l'incognito **FD**. Ma sappiamo che questi due lati debbono incontrarsi nel punto **R** che **AB** ha in comune con la retta di Pascal. Dunque il lato **DF** passa per **R** e, perciò, il punto **F** resta individuato come intersezione della retta **r** con la retta **DR**. È possibile, anche, osservare l'esagono di Pascal completato **ABCDFE**.

Una volta trovato il punto **F**, possiamo costruire le tangenti nei punti **E** e **B** e nei punti **C** e **A** (vedi paragrafo 4.24 della seconda parte), e applicare la costruzione della conica passante per tre punti e due tangenti al fine di ottenere i due rami dell'iperbole.

#### thinkdesign

- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la retta **r** passante per **E**. Costruisce i lati del poligono di Pascal che passa per i punti selezionati, ovvero **EABCD**.

- *Inserisci / Punto / Su intersezione di curve/superfici*, costruisce i due punti **P** e **Q**; sono rispettivamente le intersezioni dei lati opposti **AE** e **CD**, e dei lati opposti **r** e **CB**.
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la retta di Pascal che passa per i punti **P** e **Q**.
- *Modifica / Aggiusta curve*, estende la retta **AB** fino al punto **R** intersezione con la retta di Pascal (**PQ**).
- *Inserisci / Disegno / Linea / 2 Punti*, costruisce la retta **RD** individuando il punto **F** intersezione con la retta **r**.

Adesso si costruiscono le tangenti nei punti **B** ed **E** per poter disegnare il ramo di iperbole passante per i tre punti **B, E, D**.

*Inserisci / Curve / Coniche/Conica*, dati per i tre punti **B, E** e **D** e le due tangenti in **B** ed **E**, consente di disegnare il ramo della conica **Γ**.

Per costruire il secondo ramo di iperbole passante per i tre punti **A**, **C** e **F** si ripetono le ultime due operazioni anzidette. Ovvero si trovano le due tangenti in **A** e **C** e si applica il comando conica per tre punti e due tangenti (vedi paragrafo 4.24 della seconda parte).

#### 4.29 Costruzione della conica dati due fasci prospettivi

Due punti staccati su una circonferenza, che proiettano altri punti della medesima circonferenza, generano due fasci congruenti e perciò prospettivi. Dato che l'incidenza è una invariante proiettiva, se si proietta un cerchio, ottenendo una conica, i due fasci si intersecano nei punti della conica che può essere perciò descritta come il prodotto di due fasci proiettivi.

Due fasci che proiettano punti di una medesima retta punteggiata sono prospettivi, perché si può passare da elementi dell'uno a elementi dell'altro con una sola operazione di proiezione e sezione. Se separiamo i due fasci e li ruotiamo in modo che si taglino, in qualsiasi modo, i due fasci sono proiettivi, perché si può passare dall'uno all'altro per mezzo di più operazioni proiezione e sezione: ad esempio attraverso la costruzione della proiettività tra forme di prima specie (vedi il paragrafo 1.7 della prima parte). Ma, dato che i due fasci sono proiettivi, l'intersezione delle rette corrispondenti darà luogo ai punti di una conica.

La rappresentazione matematica consente di verificare questo assunto.

Per fare ciò si costruiscono due fasci prospettivi generici di centri  $S'$  e  $S''$ , con le rette corrispondenti  $a', b', c', d', e'$  e  $a'', b'', c'', d'', e''$  (figura 4.40). Sarebbe sufficiente prendere solo tre coppie di rette corrispondenti per determinare una conica, dato che sono sufficienti cinque punti per determinarla. Lo scopo, però, è verificare che, per questi due fasci

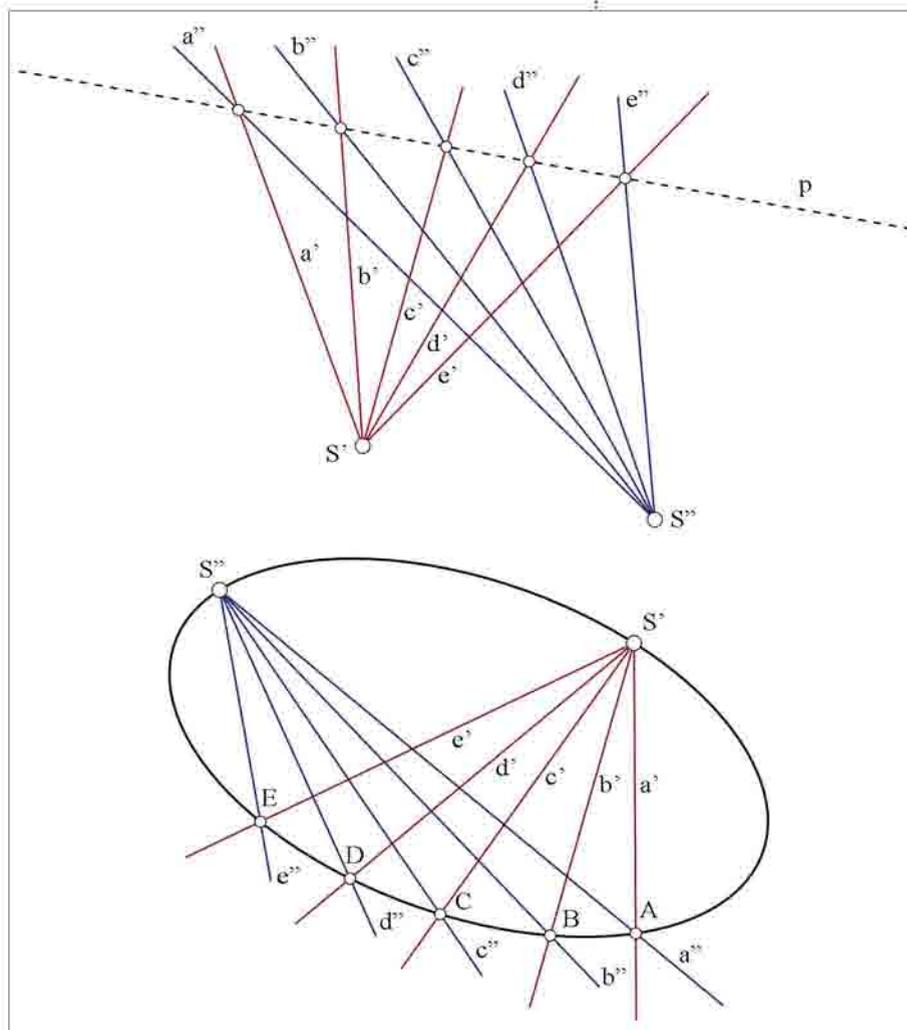


Fig. 4.40

(traslati e ruotati liberamente), passi effettivamente una conica (e una soltanto). Per cui conviene prendere almeno un'altra coppia di rette. Una volta disegnati i due fasci prospettivi, riferiti a una medesima retta punteggiata **p**, si possono traslare e ruota-

Fig. 4.40 Costruzione della conica dati due fasci prospettivi. Si costruiscono i due fasci prospettivi di centro  $S'$  e  $S''$  e rette corrispondenti  $a', b', c', d', e'$  e  $a'', b'', c'', d'', e''$ . Si separano i due fasci, trasladandoli e ruotandoli liberamente nel piano. Intersecando le coppie di rette corrispondenti dei due fasci proiettivi, si ottengono i punti di una conica

re liberamente nel piano conservando sempre la relazione di proiettività. Come abbiamo detto, i due fasci non saranno più prospettivi ma saranno comunque due fasci proiettivi, per cui sarà possibile passare da una forma a un'altra per mezzo di un numero finito d'operazioni di proiezione e sezione. Intersecando i due fasci, le coppie di rette corrispondenti s'incontrano in punti di una conica, ad esempio  $a'$  e  $a''$  in  $A$  e così via. Una volta determinati i sette punti  $A, B, C, D, E, S', S''$  è possibile costruire la conica che passa per essi utilizzando le considerazioni precedenti (vedi costruzioni illustrate nei paragrafi 4.24 e 4.28 della seconda parte). Nell'esempio della figura la conica determinata dai fasci proiettivi è un'ellisse.

#### thinkdesign

- *Inserisci/Disegno/Linea/2 Punti*, costruisce la retta  $p$  punteggiata. Si costruiscono i due fasci prospettivi con centri  $S'$  e  $S''$ .
- *Modifica/Sposta/*, costruisce i due fasci proiettivi traslati e ruotati di centri sempre  $S'$  e  $S''$ .
- *Modifica/Aggiusta curve/*, consente di estendere le coppie di rette corrispondenti, ad esempio  $a'$  e  $a''$  in  $A$ , nei rispettivi punti d'intersezione  $A, B, C, D, E$ .

Una volta trovati i punti anzidetti, si costruisce la conica passante per i sette punti  $A, B, C, D, E, S', S''$ . La costruzione consente di verificare sperimentalmente l'esistenza della conica che nell'esempio della figura è un'ellisse.

# Bibliografia

a cura di Anna De Santis

In questa bibliografia si trovano raccolti i libri citati nel testo e quelli essenziali per delineare una storia dei metodi della rappresentazione, prima e dopo l'avvento del computer. Sono anche citati alcuni libri che, per la ricchezza dell'apparato iconografico, costituiscono una testimonianza importante sulla costruzione e sull'uso dei modelli grafici nel passato, come alcuni manuali di tecnica delle costruzioni. Non si tratta, dunque, di una bibliografia completa, che richiederebbe un volume a se stante. Mancano, ad esempio, molte delle fonti della prospettiva, per le quali rimando alle opere fondamentali di Chasles, Poudra e Vagnetti. La bibliografia relativa alla rappresentazione informatica, matematica e numerica, è ridotta a quei testi che hanno consolidato la loro fama nei pochi anni trascorsi dalle prime applicazioni. E mancano infine le numerose opere di molti autori contemporanei: mi sono limitato a quelle che sperimentano il connubio tra geometria descrittiva e informatica o che hanno rilevanza dal punto di vista storico. Un repertorio ancora parziale, ma commentato, è disponibile alla consultazione all'indirizzo <http://www.migliari.it> nella pagina dedicata al download.

I testi sono ordinati per cognome dell'autore e per anno di prima edizione (nel caso di opere straniere, a volte è indicato l'anno della prima edizione in italiano), mentre la citazione bibliografica si riferisce all'edizione consultata.

- AGAZZI E. (a cura di), *La Simmetria*, Seminari interdisciplinari di Venezia, Il Mulino, Bologna 1973.
- ALBERTI L.A., *De Pictura*, 1435, Laterza, Bari 1980.
- ALHAZEN, *Opticae Thesaurus Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi. Eiusdem liber de Crepusculis et Nubium ascensionibus. Item Vitellioni Thuringopoloni libri X omnes instaurati, figuris illustrati et aucti, adjectis enim*, F. Risnero, Basilea 1572.
- AMIOT A., *Nuove Lezioni di Geometria Descrittiva*, Napoli 1885.
- AMODEO F., *Lezioni di Geometria Proiettiva dettate nella R. Università di Napoli*, Napoli 1905.
- ANGELINI A., *Trattato teorico pratico di prospettiva*, Roma 1862.
- ANTONELLO F., *Corso completo di prospettiva ragionata*, Napoli 1889.
- APOLLONIO, *Apollonii Pergaei conicorum libri quatuor. Una cum Pappi Alexandrini Lemmatibus, et Commentariis Eutocii Ascalonitae. Sereni Atinsensis Philosophi Libri duo nunc primum in lucem editi*, edizione originale della traduzione latina di Federico Commandino, Bologna 1566.
- ARNÒ V., *Applicazioni di geometria descrittiva (Ombre, prospettiva, assonometria, gnomonica)*, Torino 1887.
- ARUSTAMOV K.A., *Problems in Descriptive Geometry*, Mir, Mosca 1972.
- ASCHIERI F., *Geometria Descrittiva*, Milano 1887.
- ASCHIERI F., *Geometria Proiettiva dello Spazio*, Hoepli, Milano 1895.

# Indice analitico

- Accuratezza, XIII, 14, 17, 206, 228, 290, 297, 308, 322  
Affinità, 21-22, 24, 85-86, 94-96, 98, 101, 134-36, 170-72, 174, 176-79, 181, 191-95, 197-201, 360  
Aggetto, 67-68, 73-74, 156  
Alzato, 6, 16, 63, 66-68, 97, 99, 103, 106-108, 172, 206, 216-18, 228, 235-36  
Ampliamento proiettivo, 9  
Angolo, 13, 22, 30, 49, 52-53, 90-91, 94, 96, 117, 129, 134-35, 138-40, 142, 155, 177-78, 180, 183, 204, 214-15, 221-23, 240-41, 261, 269-72, 307, 323, 328-29, 331-38, 340-41, 343, 348, 352, 363-64  
di pendenza, 30-31, 53, 92, 122, 141, 176-77, 270-71  
di pendio, 31-31, 54-55, 92, 130-33, 136-37, 140-42, 272-73  
diedro, 30, 140-41, 170-72, 191, 193, 268-69, 271-72, 323, 332  
triedro, 323  
Angoloide, 141, 323-24, 345  
Apollonio, problema di, XIII, 274-75, 277-78, 280, 283, 285-88, 290-91, 293-95, 298  
Appartenenza, 5, 26-27, 41-42, 47, 80, 85, 109, 119, 128, 130, 153, 162, 166, 189-90, 255  
Asse di proiezione, 8  
Basis spline, 208, 247, 249-50, 378  
Bézier  
  algoritmo di, 248, 250  
  curve di, 208, 250  
  superfici di, 251  
Birapporto, 13-15  
Boundary representation, 210-11, 225  
B-rep, *vedi* Boundary representation  
Brianchon  
  esagono di, 305, 308, 312  
  punto di, 304-305  
  teorema di, 304, 306, 308, 310, 312  
B-spline, *vedi* Basis spline  
Camera, 217, 234-35, 238  
Centro di proiezione, 5, 7-9, 14, 19, 23, 33-35, 49-50, 56, 59-61, 108-109, 117-18, 153-54, 156, 161-63, 182-84, 187, 189-90, 192, 204, 352  
Cerchio  
  di distanza, 34-35, 49, 51-52, 54, 56-57, 61  
  di misura, 60-61  
Cerniera, 49-51, 54, 56, 59, 66-67, 84-85, 87, 89-96, 98, 112, 120, 123, 132-33, 135-36, 170-73, 176-78, 180, 193, 198, 348, 356  
Chiaroscuro, 64, 148, 207, 229  
Cilindro, 32-33, 209  
Compenetrazione, 32, 367-68  
Complanarità, 26, 41, 43  
Condizioni  
  di appartenenza, 26-27, 41, 109, 128, 130  
  di complanarità, 41, 43  
  di parallelismo, 27-28, 41-42, 128-29  
  di perpendicolarità, 29  
Configurazione di Kasner, *vedi* Kasner, configurazione di  
Conica, 34, 209, 303, 305, 307-16  
Continuità, 206-208, 210, 228, 246  
Copertura a padiglione, 141  
Corda, 296, 303

- Curvatura, 148, 246-47
- Curve, XIII-XIV, 21, 33-34, 145-47, 149-52, 208-10, 213-15, 218-19, 221-25, 228, 246-50, 322, 325-42, 344, 353-57, 361-65, 367-68  
di Bézier, *vedi* Bézier, curve di
- Diagonale, 52-53, 347, 365
- Diametri coniugati, 21, 302-304, 359-61
- Dilatazione, 183
- Direttrice, 92, 94, 334, 338, 341
- Direzione, 5, 7, 9-12, 20-24, 27-28, 30-31, 34-36, 40-41, 45, 47, 52, 56, 60, 62, 70-71, 80, 92, 94, 96-97, 108-109, 117-118, 120, 122, 129, 136-38, 140-41, 153-55, 161-63, 170, 173, 175, 178, 180, 182-84, 189-201, 204, 213, 215-220, 223, 229, 236-40, 243, 246, 258-59, 262-63, 267, 279, 285, 293, 296, 302, 304, 326-338, 342, 344, 352-54, 357, 359, 361, 364-65
- Distanza, 10-11, 26, 34-35, 39, 49-52, 54-57, 59-61, 64, 67-68, 85, 89, 91-95, 108-109, 111-12, 114-15, 120, 122, 124-25, 132, 134-37, 142, 144-48, 156, 170, 172-73, 175-76, 178, 180, 184, 191-94, 197-98, 212, 214, 15, 244, 262, 264, 275-76, 282-83, 287, 289, 292-95, 341, 346, 348, 352, 365
- Divina proporzione, *vedi* Proporzione divina
- Dodecaedro, 345-50
- Dualità, 300
- Ellisse, 284, 303
- Enti geometrici, 5-6, 26, 31, 34, 37, 44, 48, 60, 66, 69, 109, 116-19, 134-35, 154, 156, 158, 162, 169, 183, 186, 190-91, 213, 216, 228, 233, 237, 245, 281
- Equidistanza, 112-15, 145-47, 339
- Errore, 212, 215, 304, 322
- Esaedro, 346-47
- Esagono, 304-305, 308, 322  
di Brianchon, *vedi* Brianchon, esagono di  
di Pascal, *vedi* Pascal, esagono di  
semplice, 304-305, 307-308
- Fasci  
proiettivi, 307-308, 315-16  
prospettivi, 315-16
- Fascio  
di piani, 13, 55, 64, 122, 124, 164, 180, 272, 365-66  
di raggi, 300-301  
di rette, 10, 13, 64, 80, 108, 168, 275, 300, 307-308
- Forme fondamentali  
di prima specie, 12-13, 15-16, 307, 315  
di seconda specie, 12-13, 17-18, 23, 34  
di terza specie, 13, 24
- Fuga, 10-11, 28, 35-47, 49-62
- Fuoco, 284, 287
- Generatrice, 272, 331-35, 338, 341
- Geometria proiettiva, 5, 11, 20, 26, 34, 64
- Giacitura, 5-6, 10-12, 19, 21, 23, 27-28, 30, 37, 39, 56, 68, 116, 154, 161, 182-83, 213, 215-16, 221-23, 235, 239, 245, 258-59, 262, 295-96, 302, 328-38, 341-42, 352, 357-60, 364-65
- Icosaedro, 346, 349
- Intersezione, 8, 25, 29-30, 32-33, 34, 35, 37, 39, 41, 43, 44-45, 49-50, 53-55, 57-58, 66-67, 73-80, 83, 85-87, 89, 90, 94, 97-98, 106, 111-14, 119, 122-28, 130, 134-42, 149, 153, 155, 162-67, 173-74, 179-80, 190-91, 196, 199, 212, 216, 218-20, 233, 236-39, 241, 243-44, 248, 251, 255-57, 259-61, 264, 267-69, 271, 274-76, 279, 286, 288, 292, 295-300, 302-303, 305, 307, 312, 314, 334-40, 342-44, 356-57, 359-61, 363-68
- Intervallo, 208, 214
- Invarianti proiettive, 13-14, 305
- Iperbole, 284-86, 290-91, 293, 313-15
- Kasner, configurazione di, 295-97
- Lambert, legge di, 64, 204
- Linea, 26, 31-33, 67, 120, 140, 141-42, 145-48, 150-51, 207, 213-15, 217, 220-24, 231, 235-36, 252, 257, 259, 261, 263-67, 270, 275-77, 279-80, 283-85, 287, 291-94, 297-305, 308-309, 311-12, 314, 316, 325-333, 335, 337, 339, 341-42, 353-54, 356-57, 361-65  
di terra, 39, 66-67, 71-77, 81-82, 86, 88-89, 91, 94
- Lista, 207, 229-30, 232, 234

- Luogo geometrico, 10, 18, 49, 61, 91, 180, 265-68, 270, 284-87, 289-93, 339, 364
- Manifold, 211, 229
- Mesh, 152, 229-33, 236, 243, 252
- Metodo
  - matematico, 206
  - numerico, 206, 237
- Misura, XIV, 13-14, 17, 30, 39, 48-50, 55, 58-62, 68, 87, 90-96, 108-109, 117-118, 129, 132-139, 153-154, 169-70, 172-73, 175-79, 181, 184, 197-202, 204, 206, 212, 221, 223, 228-29, 237, 240-41, 243-45, 262, 264, 268-69, 271, 287, 297, 321, 325, 347, 353, 364
- Modellazione, 145, 208-209, 211-14, 216, 218, 226, 231, 233, 235-37, 243, 246, 250, 252, 275-76, 295, 297, 308, 342, 361
  - a superfici, 226-27, 246
  - solida, 225-26, 251-52, 353, 358, 367-68
- N-angolo, 229-34
- Numero aureo, 319
- NURBS (Non Uniform Rational B-Spline), 208-10, 212, 214, 225-26, 230-31, 246, 250-51
- Omografia, 15, 359
- Omologia, 19, 22-24, 85, 360-61
  - piana, 17-18, 21, 25, 359
  - solida, 24-25
- Omotetia, 23
- Operazione
  - booleana, 244
  - di proiezione, 5, 7-8, 11, 13, 19, 21, 23-24, 49, 315
- Orizzonte, 25, 39
- Ortogonalità, *vedi* Perpendicolarità
- Ottaedro, 346-47
- Pascal, retta di, 313-14
- Parabola, 20-21, 284-85, 286-88, 292, 303, 307, 309-10, 313
- Parallelepipedo, 224, 248, 352-54, 357-61
- Parallelismo, 7, 27-28, 41-42, 109, 128-29, 131-32, 153, 167, 239
- Pascal, esagono di, 304, 306, 308, 313
- Patch, 216, 231, 249
- Perpendicolarità, 7, 26, 28-30, 52, 54-56, 83, 85, 149, 169, 191, 215, 221-22, 240-41, 243, 260-64
- Piani di quadro, 17, 19, 21, 157
- Piano
  - bisettore, 141, 325-26, 338-39
  - delle fughe, 24
  - delle tracce, *vedi* Piano di collineazione
  - di collineazione, 24
  - di costruzione, 213, 215-16, 221-24, 231, 240-44, 255, 257-58, 260-61, 264, 269-70, 326-38, 340-42, 344, 347, 349, 352-54, 356-58, 361-63, 366-67
  - di lavoro, 213-14, 221-23, 155, 255, 257, 260-61, 265-67, 269-70, 298, 304, 326-29, 331-33, 347-48, 361, 364-65
  - di proiezione, 34, 37, 66-74, 80, 84-87, 89-94, 96-98, 100-101, 108, 110, 117, 153-57, 159-62, 166, 170-77, 180, 182, 184, 187-89, 192-93, 195-99, 346-50, 352, 355-56, 364
  - frontale, 71, 74, 76, 86, 161-63, 187-88, 190
  - geometrico, 39, 270
  - limite, 24
  - orizzontale, 6, 30, 47-50, 52-55, 73, 75-76, 85, 92-93, 95-96, 111, 118, 122, 127, 133, 135, 140, 145, 149, 154-56, 159-64, 167, 170, 172-73, 175-77, 182, 184-92, 198, 204-205, 255, 257, 260, 326-37, 340-42
  - proiettante, 8-9, 19, 25-26, 34-35, 37-38, 40, 44, 49-50-56, 58, 62, 67, 71-79, 85-86, 95, 111-12, 114, 117, 120, 122-25, 132, 135-36, 146, 156, 164-65, 175-76, 180, 182, 184-85, 195, 197, 219, 232, 236-38, 348
  - rigato e punteggiato, 13, 17, 19, 21, 23
- Pianta, 63, 66-68, 97, 99, 103, 106-108, 140-45, 172, 206, 216-19, 228, 233, 235-37
- Piede, 28-29, 55, 57, 83, 90, 137, 147, 241, 264, 276, 340, 349
- Piramide, 24
  - visiva, 34, 63-64, 341-43, 349-50, 352, 354-56, 361-65
- Pixel, 213

- Pohlke, teorema di, 154, 183, 202
- Point cloud, 229
- Poliedro, 34, 206-207, 228-30, 232, 234, 252, 345, 350, 352, 365-68
- Poligonale, 208, 321
- Poligono, 140-43, 224, 228-32, 235, 237-40, 242-44, 248, 258, 314, 321-23, 342, 345, 352, 354-56, 358-59, 366-68
- Polo, 56-57, 300-302
- Punctuation, 79
- Posizione
  - generica, 41, 50, 60, 76-77, 79, 162, 164-66, 181, 190-91, 200-201, 217-19, 222, 236-38, 264, 353-54, 361
  - particolare, 37, 69, 116-17, 158-61, 186-87, 189-90, 272
- Prisma, 245, 352-55, 357-62
- Problema di Apollonio, *vedi* Apollonio, problema di
- Proiezione
  - cilindrica, 204
  - conica, 34
  - normale, 29-31, 53, 55, 223, 243-44, 267
- Proporzione divina, 317
- Proprietà invarianti, 13
- Prospettiva, XIII-XIV, 10, 14-15, 34, 39, 42-44, 48, 53, 55, 58-59, 61-64, 103, 153-54, 183, 187, 194, 197, 201-204, 365
  - aerea, 64
  - parallela, 153-56, 159, 167, 182, 189-90, 201, 204
- Punto
  - all'infinito, 10, 302
  - di Brianchon, *vedi* Brianchon, punto di
  - di contatto, 20, 281-83, 287-88, 295-97, 299-300, 306, 308, 310-13
  - di misura, 59-60, 62
  - improprio, 10, 64
  - principale, 34-37, 49-50, 52, 54-56, 61-62, 235
- Quadrato, 96, 117, 276, 319, 321-22, 345-47, 359-60
- Quadro, 5, 8-10, 12, 14, 17, 19, 21, 23, 33-41, 44, 48-52, 54-56, 58, 60-64, 108-109, 111-114, 116-19, 126, 128-29, 132-38, 145, 153-63, 166-67, 169-78, 180-87, 189-202, 204-205
- Quota, 67-68, 73-74, 85, 89, 91, 108-130, 132-37, 140, 142-49, 152, 156, 160, 184, 187, 191, 255, 349-50
- Raddrizzamento, 58-59, 67, 96, 100, 213, 327-28, 348, 356
- Rapporto aureo, 317-20, 349-50
- Rappresentazione
  - del piano, 36, 42, 51, 69, 114, 157-59, 185
  - del punto, 39-40, 44, 47, 67, 109, 156, 183
  - della retta, 34, 36, 40, 68, 109, 147, 156, 184
  - poligonale, XIII, 6, 206, 228, 230, 244
- Rendering, 6, 228-29
- Retta
  - all'infinito, 11, 302
  - di massima pendenza, 31, 54-56, 75-78, 92-93, 96, 122-23, 136-37, 139, 142, 170-71, 191-96, 199, 271, 273
  - di minima distanza, 262
  - di Pascal, *vedi* Pascal, retta di
  - di richiamo, 67, 74-77, 81, 156, 184-85
  - frontale, 73-76, 81, 85-87, 91, 159-60, 162-63, 172-75, 179, 187, 190
  - impropria, 11, 64, 215
  - normale, 56, 91, 172-74, 179-80, 192, 194-96, 199, 223, 229, 261, 263, 267
  - punteggiata, 10, 13, 15, 300, 315, 317
  - orizzontale, 54-55, 75-78, 81-82, 84-87, 90-94, 96, 116-23, 126-27, 133-40, 144-45, 155, 160-64, 170-72, 187, 191-93, 196, 198, 255-57, 260, 272, 326, 334-35, 337, 341
  - polare, 299-302
- Rette limiti, 19-20
- Ribaltamento, 23-24, 49-56, 58-60, 64, 67, 84-87, 89-96, 98, 100, 108, 112-15, 117-27, 130, 132-38, 140, 142, 144, 147-48, 155-62, 169-81, 183-84, 190-200, 204, 213, 269, 296-97, 327-28, 330, 343, 348, 356, 358-59, 361-63
- Ricostruzione nello spazio, 35, 68, 97
- Riduzione all'orizzonte, 335-36

- Scala di pendenza, 112-14, 119-20, 129, 145, 147, 149  
 Scorcio, 48, 63, 69  
 Sezione  
   aurea, 317-20  
   retta, 30  
   normale, 325, 328-32, 334  
 Sfaldamento, 367-68  
 Sfera, 103, 144, 228, 250, 266-68, 274, 296-98, 346-47, 360, 363-64  
 Simboli, 6-7, 68  
 Simmetria, 22, 285, 341, 347-49  
 Sistema  
   di coordinate utente, 213, 252  
   di riferimento, 6-7, 36, 106, 153-55, 182-83, 201-202, 207, 213, 216-17, 229, 235, 240, 245, 270, 298, 335, 351  
 Solid modeling, 246  
 Solidi platonici, 345  
 Spazi lineari (a una, due e tre dimensioni), 13  
 Spigolo, 15-16, 30, 141, 211, 229, 272, 301, 323, 327-37, 339-40, 346-47, 350, 353-54, 356-57, 362, 365-66, 368  
 Spline, 208, 235, 237-41, 243, 247, 249-50  
 Stella di rette e di piani, 13  
 Stereotomia, XIII, 99, 104, 149  
 Superfici parametriche, 210  
 Superficie  
   di interpolazione, 145  
   topografica, 145, 147  
 Sviluppo, XIV, 99, 105-106, 148, 153, 202-203, 205-206, 224-25, 249, 250-51, 357-58, 361-63  
 Tangente (retta, piano), 13, 20, 146, 222, 266-67, 271-72, 274, 276, 278-88, 290, 293-97, 299-300, 305-12, 332-37, 340-41  
 Tassellazione, 207, 230-31, 244  
 Teorema  
   di Pohlke, *vedi* Pohlke, teorema di  
   di Brianchon, *vedi* Brianchon, teorema di  
 Tetraedro, 203, 343, 345-47, 352  
 Tetti  
   a gronda costante, 140, 142, 145  
   a gronda inclinata, 145  
 Tetto a padiglione, *vedi* Copertura a padiglione  
 Tolleranza, 27, 212, 233  
 Traccia, 8, 35-39, 41-47, 54-55, 57-62, 68, 74-77, 80, 82, 86, 92-93, 110, 112, 116-23, 128-29, 133-34, 136-37, 140, 155, 157-62, 164-66, 170-82, 184-201, 272-73, 340  
 Traslazione, 22-23, 92, 162, 188-89, 222, 232, 241, 243, 262, 265-67, 331, 352-53  
 Triangolo, 13, 17, 23-24, 50, 52-53, 56, 59-60, 81-83, 89-90, 92, 94, 96, 100, 118, 120-21, 124-25, 130-31, 133, 135-36, 138, 153-54, 161-64, 166-67, 170-73, 181, 186-87, 189, 192-92, 200, 202, 228-31, 234, 239-41, 243, 266, 275, 279, 293-95, 301-302, 307-308, 321-24, 331-32, 343-45, 347, 356-57, 365  
   delle tracce, 153-54, 202  
   diagonale, 301-302  
   polare, 301-302  
 Triedro, 323-36, 339-40, 343-44  
 Trim, 215, 331, 343  
 Vanishing  
   line, 10-11  
   point, 10  
 Vera forma, 23, 58, 62, 69, 87, 92, 94-96, 98, 100-101, 108, 117-18, 129, 132-37, 142-44, 159-62, 169, 172-73, 176, 178, 181-82, 187-88, 190-91, 197-201, 205, 237, 359  
 Vista, 34, 62, 139, 159-60, 173, 181, 183, 187, 197  
 Wireframe, 210, 212

## References

1. ASCHIERI, Ferdinando. *Geometria descrittiva dello spazio*. Hoepli, Milano. 1895.
2. ASCHIERI, Ferdinando. *Geometria Proiettiva. Lezioni di Ferdinando Aschieri*, Milano. 1888.
3. FALLAVOLLITA, Federico. Le superfici rigate: una rilettura del *Traité de géométrie descriptive* di Hachette. In DE CARLO, Laura (a cura di). *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*. Vol. 1 - nuova serie. Roma: Gangemi, 2007, pp. 111-122. ISBN 978-88-492-1323-2.
4. FALLAVOLLITA, Federico. *Le superfici rigate e le superfici sviluppabili. Una rilettura attraverso il laboratorio virtuale*. Tesi di Dottorato di Scienza della Rappresentazione e del Rilievo dell'Architettura. Sapienza Università di Roma: Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, 2008.
5. FIEDLER, William. *Trattato di geometria descrittiva*, a cura di Antonio Sayno ed Ernesto Padova, Firenze. 1874.
6. GHEORGHIU, A. and DRAGOMIR, V. *Geometry of structural Forms*. Applied Science Publisher LTD, Bucarest. 1978.
7. HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Traité de géométrie descriptive*. Paris: Corby, 1822, pp.283-286.
8. HACHETTE, Jean Nicolas Pierre. *Rapport fait à la classe des Sciences Physique et Mathématiques de l'Institut [...] In Correspondance sur l' École Royale Polytechnique, à l'usage des élèves de cette École, volume III*. Paris: Imprimerie de M.me V. Courcier, 1816, pp. 234-237.
9. HILBERT, David. *Geometria intuitiva*. Boringhieri, Torino. 1972.
10. KLINE, Morris. 1991. *Storia del pensiero matematico, dall'antichità al settecento*, volume I. Torino: Einaudi.
11. LORIA, Gino. *Storia della geometria descrittiva dalle origini ai giorni nostri*. Milano: Hoepli, 1921.
12. MIGLIARI, Riccardo. *Geometria dei modelli*. Kappa edizioni, Roma. 2003.
13. MIGLIARI, Riccardo. *Rappresentazione come sperimentazione*. In Ikhnos, *Analisi grafica e storica della rappresentazione*. Lombardi, Siracusa. 2008.
14. SELLER, Giovanni. *Geometria descrittiva, elementi ed applicazioni*. Milano: Hoepli, 1946.